Exercice 1

1. On a $B(-3,1) = \int\limits_0^1 x^{-3}(1-x)dx = \int\limits_0^1 \frac{1-x}{x^3}dx$ et la fonction $x \mapsto \frac{1-x}{x^3}$ n'est pas définie en 0 et donc pas continue en 0 ce qui implique que $B(-3,1)$ n'existe pas.
   On a $B(2,-1) = \int\limits_0^1 x^2(1-x)^{-1}dx = \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1-x}dx$ et la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{1-x}$ n'est pas définie en 1 et donc pas continue en 1 ce qui implique que $B(2,-1)$ n'existe pas.
   On a $B(3,5) = \int\limits_0^1 x^3(1-x)^5dx$ et la fonction $x \mapsto x^3(1-x)^5$ est continue sur $[0,1]$ ce qui implique que $B(3,5)$ existe.
2. Pour que l'intégrale existe, il est indispensable que la fonction $x \mapsto x^p(1-x)^q$ soit continue sur $[0,1]$. Elle est continue sur $]0,1[$ et pour assurer son existence ainsi que sa continuité en 0, il est indispensable d'exiger que $p \geqslant 0$. Quant à sa continuité en 1, il faut et il suffit que $q \geqslant 0$. Par conséquent, $B(p,q)$ existe si et seulement si $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 0$.
3. $B(p,0) = \int\limits_0^1 x^p dx = [\frac{x^{p+1}}{p+1}]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{p+1}$.
4. $t = 1-x$ donc $x = 1-t$ et $dx = -dt$. Quand $x = 0$ alors $t = 1$ et quand $x = 1$, $t = 0$. On en déduit que
$$B(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx = -\int_1^0 (1-t)^p t^q dt = \int_0^1 t^q(1-t)^p dx = B(q,p).$$
5. On pose $u(x) = (1-x)^q$ et $v'(x) = x^p$ donc $u'(x) = -q(1-x)^{q-1}$ et $v(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$. L'IPP nous donne
$$\begin{aligned} B(p,q) &= \int_0^1 x^p(1-x)^q dx = [\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1}\left(-q(1-x)^{q-1}\right)dx \\ &= 0 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{q}{p+1}B(p+1,q-1) \end{aligned}$$
6. $B(p,q) = \frac{q}{p+1}B(p+1,q-1)$, $\quad B(p+1,q-1) = \frac{q-1}{p+2}B(p+2,q-2)$ donc
$$B(p,q) = \frac{q}{p+1}.\frac{q-1}{p+2}B(p+2,q-2) = \frac{q(q-1)}{(p+1)(p+2)}B(p+2,q-2)$$
   En utilisant ensuite que $B(p+2,q-2) = \frac{q-2}{p+3}B(p+3,q-1)$, on en déduit que
$$B(p,q) = \frac{q(q-1)(q-2)}{(p+1)(p+2)(p+3)}B(p+3,q-3).$$
   En poursuivant ainsi, on en déduit que
$$\begin{aligned} B(p,q) &= \frac{q(q-1)\dots(q-(q-1))}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)}B(p+q,q-q) \\ &= \frac{q(q-1)\dots 1}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)}B(p+q,0) \\ &= \frac{q!p!}{(p+q)!}B(p+q,0) = \frac{q!p!}{(p+q)!}.\frac{1}{p+q+1}. \end{aligned}$$

Exercice 2

1. La fonction $t \mapsto \frac{t}{\ln t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $4 \in]1,+\infty[$ donc $x \mapsto \int\limits_4^x \frac{t}{\ln t}dt$ est définie sur $]1,+\infty[$.
2. Puisque que $t \mapsto \frac{t}{\ln t}$ est continue sur $]1,+\infty[$ et et $4 \in]1,+\infty[$, la fonction f est C^1 sur $]1,+\infty[$ et $\forall x > 1, \quad f'(x) = \frac{x}{\ln x}$.
3. On pose $a(x) = \ln t - \sqrt{t}$. Cette fonction est dérivable sur $[4,+\infty[$ et $a'(x) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{2-\sqrt{t}}{2t} \leqslant 0$. La fonction a est croissante sur cet intervalle et $a(4) = \ln 4 - 2 \leqslant 0$ donc $\forall x \geqslant 4, \quad a(x) \leqslant 0$.
4. Si $x \geqslant 4$, alors $\forall t \in [4,x]$, on a $0 \leqslant \ln t \leqslant \sqrt{t} \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\ln t} \Leftrightarrow 0 \leqslant \sqrt{t} \leqslant \frac{t}{\ln t}$. En intégrant cette inégalité sur $[4,x]$, on en déduit que $\forall x \geqslant 4, \quad \int\limits_4^x \sqrt{t}dt \leqslant f(x)$ et on évalue $\int\limits_4^x \sqrt{t}dt = \int\limits_4^x t^{1/2}dt$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

5. La fonction f est continue sur $[4,+\infty[$, strictement croissante sur $[4,+\infty[$ (sa dérivée est $f'(x)=\dfrac{x}{\ln x}>0$) donc elle réalise une bijection croissante de $[4,+\infty[$ sur son image. Puisque $f(4)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, on en déduit que f réalise une bijection de $[4,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$.
6. La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{x}{\ln x}>0$ si $x>1$ donc f' ne s'annule jamais. La bijection réciproque f^{-1} de f est définie de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $[4,+\infty[$. Puisque f est continue, f^{-1} l'est aussi. L'utilisation du théorème sur la dérivabiité d'une réciproque montre que la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ tout entier (puisque f' ne s'annule jamais)

Exercice 3

1. Il est immédiat que $V_{4,2}(\Omega)=\{0,1,2\}$.
$P(V_{4,2}=0)=\dfrac{C_4^2}{C_8^2}$, $\quad P(V_{4,2}=1)=\dfrac{C_4^1\times C_4^1}{C_8^2}$, $\quad P(V_{4,2}=2)=\dfrac{C_4^2}{C_8^2}$.
$E(V_{4,2})=0.\dfrac{C_4^2}{C_8^2}+1.\dfrac{C_4^1\times C_4^1}{C_8^2}+2.\dfrac{C_4^2}{C_8^2}=1.$
2. $V_{n,p}(\Omega)=\{0,..,p\}$. $\quad P(V_{n,p}=k)=\dfrac{C_n^k\times C_n^{p-k}}{C_{2n}^p}\ \forall k\in\{0,..,p\}$
3. $V_{n,n}(\Omega)=\{0,..,n\}$. $\quad P(V_{n,n}=k)=\dfrac{C_n^k\times C_n^{n-k}}{C_{2n}^n}=\dfrac{(C_n^k)^2}{C_{2n}^n}\ \forall k\in\{0,..,n\}$.
$1=\sum\limits_{k=0}^{n}P(V_{n,n}=k)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(C_n^k)^2}{C_{2n}^n}=\dfrac{1}{C_{2n}^n}\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$.
4. $V_{4,5}(\Omega)=\{1,2,3,4\}$. $\quad P(V_{4,5}=1)=\dfrac{C_4^1\times C_4^4}{C_8^5}$, $\quad P(V_{4,5}=2)=\dfrac{C_4^2\times C_4^3}{C_8^5}$,
$P(V_{4,5}=3)=\dfrac{C_4^3\times C_4^2}{C_8^5}\quad P(V_{4,5}=4)=\dfrac{C_4^4\times C_4^1}{C_8^5}$.
5. $V_{n,p}(\Omega)=\{p-n,..,n\}\quad P(V_{n,p}=k)=\dfrac{C_n^k\times C_n^{p-k}}{C_{2n}^p}\ \forall k\in\{p-n,..,n\}$

Exercice 4

1. $X_3(\Omega)=\{0,1,2,3\}$. Les évènements $B_i,\overline{B_j}$ étant deux à deux indépendants, on a
$(X_3=0)=\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\Rightarrow P(X_3=0)=P(\overline{B_1})P(\overline{B_2})P(\overline{B_3})=(1-p)^3$
$(X_3=1)=B_1$ donc $P(X_3=1)=P(B_1)=p$
$(X_3=2)=\overline{B_1}\cap B_2\Rightarrow P(X_3=2)=P(\overline{B_1})P(B_2)=(1-p)p$
$(X_3=3)=\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap B_3\Rightarrow P(X_3=2)=P(\overline{B_1})P(\overline{B_2})P(B_3)=(1-p)^2p$
2. $X_n(\Omega)=\{0,..,n\}$. Les évènements $B_i,\overline{B_j}$ étant deux à deux indépendants, on a
$(X_n=0)=\overline{B_1}\cap..\overline{B_n}\Rightarrow P(X_n=0)=P(\overline{B_1})..P(\overline{B_n})=(1-p)^n$
$\forall k\in\{1,..,n\}\quad (X_n=0)=\overline{B_1}\cap..\overline{B_{k-1}}\cap B_k$
$\Rightarrow P(X_n=0)=P(\overline{B_1})..P(\overline{B_{k-1}})P(B_k)=(1-p)^{k-1}p$
$Y_n(\Omega)=\{0,..,n\}$. Les évènements $R_i,\overline{R_j}$ étant deux à deux indépendants, on a
$(Y_n=0)=\overline{R_1}\cap..\overline{R_n}\Rightarrow P(Y_n=0)=P(\overline{R_1})..P(\overline{R_n})=(1-r)^n$
$\forall k\in\{1,..,n\}\quad (Y_n=0)=\overline{R_1}\cap..\overline{R_{k-1}}\cap R_k$
$\Rightarrow P(Y_n=0)=P(\overline{R_1})..P(\overline{R_{k-1}})P(R_k)=(1-r)^{k-1}r$

   (a) Si $i<j$, l'évènement $(X=i\cap Y=j)$ correspond à n'avoir aucune boule blanche et aucune boule rouge avant le $i^{ème}$ tirage (c'est-à-dire obtenir que des boules vertes aux $(i-1)$ premiers tirages), à obtenir une boule blanche au $i^{ème}$ tirage puis n'obtenir aucune boule rouge avant le $j^{ème}$ tirage, d'où
   $(X=i\cap Y=j)=V_1\cap..\cap V_{i-1}\cap B_i\cap\overline{R_{i+1}}\cap..\cap\overline{R_{j-1}}\cap R_j$
   Si $i=j$, $(X=i\cap Y=j)=\emptyset$ donc $P(X=i\cap Y=j)=0$.
   Si $i>j$, l'évènement $(X=i\cap Y=j)$ correspond à n'avoir aucune boule blanche et aucune boule rouge avant le $j^{ème}$ tirage (c'est-à-dire obtenir que des boules vertes aux $(j-1)$ premiers tirages), à obtenir une boule rouge au $j^{ème}$ tirage puis n'obtenir aucune boule blanche avant le $i^{ème}$ tirage, d'où
   $(X=i\cap Y=j)=V_1\cap..\cap V_{j-1}\cap R_j\cap\overline{B_{j+1}}\cap..\cap\overline{B_{i-1}}\cap B_i$

   (b) Si $i<j\quad P(X=i\cap Y=j)=P(V_1)..P(V_{i-1})P(B_i)P(\overline{R_{i+1}})..P(\overline{R_{j-1}})P(R_j)$
   ce qui nous donne $P(X=i\cap Y=j)=u^{i-1}(1-r)^{j-i-1}pr$
   Si $i=j\quad P(X=i\cap Y=j)=0$
   Si $i>j\quad P(X=i\cap Y=j)=P(V_1)..P(V_{j-1})P(R_j)P(\overline{B_{j+1}})..P(\overline{B_{i-1}})P(B_i)$
   ce qui nous donne $P(X=i\cap Y=j)=u^{i-1}(1-p)^{j-i-1}pr$

   (c) Par les mêmes types d'arguments, on obtient : $\quad P(X=0\cap Y=j)=u^{j-1}r$
   $P(X=i\cap Y=0)=r^{i-1}p\quad P(X=0\cap Y=0)=r^n$.

3. $P(X=1\cap Y=1)=0\neq rp=P(X=1)P(Y=1)$ donc ces deux variables ne sont pas indépendantes.

Exercice 5

1. Les trois variables suivent la même loi. Nous n'expliciterons donc que celle de X_2
   $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. L'évènement $(X_2 = 0)$ (resp. $(X_2 = 2)$ correspond à ce qu'aucun des deux clients ne choisit le menu X (resp. les deux clients choisissent le menu X)et l'évènement $(X_2 = 1)$ signifie qu'un client (il faut donc le sélectionner) choisit le menu X et que l'autre choisit un autre menu.
   Ainsi $P(X_2 = 0) = (\frac{2}{3})^2 \quad P(X_2 = 1) = C_2^1(\frac{1}{3})(\frac{2}{3}) \quad P(X_2 = 2) = (\frac{1}{3})^2$
   $E(X_2) = \frac{2}{3}$ et $V(X_2) = \frac{4}{9}$.
2. Les trois variables suivent la même loi car tous les menus ont la même probabilité d'être choisis et si l'on échange deux menus quelconques, la situation est en tout point similaire.
   Nous explicitons donc la loi de X_n. Comme nous l'avons remarqué précédemment l'évènement $(X_n = k)$ signifie que k clients (que l'on sélectionne parmi les n) choisissent le menu X et les autres choisissent les autres menus.
   $X_n(\Omega) = \{0, .., n\} \quad P(X_n = k) = C_n^k(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{n-k}$
3. Les valeurs possibles pour $n - X_n$ sont tous les nombres entiers entre $n - 0$ et $n - n$ donc $(n - Z_n)(\Omega) = \{0, .., n\}$
   Soit $k \in \{0, .., n\} \quad P(n - X_n = k) = P(X_n = n - k) = C_n^{n-k}(\frac{1}{3})^{n-k}(\frac{2}{3})^k$
4. Chaque client choisit un et un seul menu donc $X_n + Y_n + Z_n = n$ donc $Y_n + Z_n = n - X_n$ et sa loi est :
   $(Y_n + Z_n)(\Omega) = \{0, .., n\} \quad \forall k \in \{0, .., n\} \quad P(Y_n + Z_n = k) = C_n^{n-k}(\frac{1}{3})^{n-k}(\frac{2}{3})^k$
5. Il s'agit bien entendu de l'évènement $[(X_n = n) \cup (Y_n = n) \cup (Z_n = n)]$. Puisque les variables X_n, Y_n et Z_n sont évidemment indépendantes, on a :
   $$\begin{aligned} P[(X_n = n) \cup (Y_n = n) \cup (Z_n = n)] &= P(X_n = n) + P(Y_n = n) + P(Z_n = n) \\ &= 3.(\frac{1}{3})^n = (\frac{1}{3})^{n-1} \end{aligned}$$
6. On applique le crible de Poincarré en se rappellant que les variables X_n, Y_n et Z_n sont indépendantes.
   $P([X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]) = P(X_n = 0) + P(Y_n = 0) + P(Z_n = 0)$
   $-P([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]) - P([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) - P[(X_n = 0] \cap [Z_n = 0])$
   $+P([X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) = 3.(\frac{2}{3})^n - (P(Z_n = n) + P(X_n = n)$
   $+P(Y_n = n)) + 0 = 3.(\frac{2}{3})^n - 3.(\frac{1}{3})^n$
7. L'évènement $[X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]$ correspond à ce qu'au moins un menu ne soit pas choisit donc l'évènement contraire est que chaque menu est choisit au moins une fois. La probabilité recherchée est $1 - 3.(\frac{2}{3})^n + 3.(\frac{1}{3})^n$.