Exercice 1

1. **a,b et c :**
   $t_{n+1} = \frac{1}{5}t_n$ donc $t_n = (\frac{1}{5})^n t_0$. Puisque que $t_0 = \ln a_0 - \ln b_0 < 0$, on en déduit que $t_n < 0$ pour tout entier n, ce qui implique que $\forall n \geqslant 0$, $u_n < v_n$. La suite $(u_n - v_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{5} \in]-1,1[$ donc elle converge vers 0
2. $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}t_n$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{2}{5}t_n$: la suite u est décroissante et la suite v est croissante.
3. **a et b :** les deux questions précédentes nous montrent que les suites u et v sont adjacentes donc elles convergent vers une limite commune $l \in \mathbb{R}$. On en déduit immédiatement que les suites a et b convergent vers $L = e^l > 0$.
4. $w_{n+1} = a_{n+1}b_{n+1} = a_n^{\frac{2}{5}} b_n^{\frac{3}{5}} a_n^{\frac{3}{5}} b_n^{\frac{2}{5}} = a_n^{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}} b_n^{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}} = a_n b_n = w_n$. La suite w est constante et égale à a_0b_0 donc elle converge vers a_0b_0.
   Les suites a et b convergent vers L donc w converge vers L^2 ce qui implique que $L^2 = a_0b_0$ et comme $L > 0$, on a $L = \sqrt{a_0b_0}$.

Exercice 2

Etude de la fonction h.

1. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est impaire car
   $h(-x) = -x - \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -x + \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -h(x)$.
2. Les fonctionx $x \mapsto e^x - e^{-x}$ et $x \mapsto e^x + e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x + e^{-x} \neq 0$ donc $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En outre, $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ce qui implique que h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. $h'(x) = 1 - \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - 4}{(e^x + e^{-x})^2} = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2$.
4. **Limite en** $+\infty$: $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$ donc $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 1$ et $h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ ce qui montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$
   Limite en $-\infty$: $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}} = 1$ donc $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \underset{x\to-\infty}{\to} 1$ et $h(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x$ ce qui montre que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$

Tableau de variation

	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	|	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. Le calcul de limite précédent montre que $h(x) - (x-1) \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$ donc $y = x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$ et $-\infty$.

Etude de la fonction f

1. $f(x) \underset{x\to0}{=} \dfrac{(1 + x + o(x)) - (1 - x + o(x))}{x} \underset{x\to0}{=} \dfrac{2x + o(x)}{x} \underset{x\to0}{\sim} 2 \Rightarrow f(x) \underset{x\to0}{\to} 2 = f(0)$ donc f est continue en 0.
2. $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to0}{=} \dfrac{\dfrac{e^x - e^{-x}}{x} - 2}{x} = \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2}$
   $\underset{x\to0}{=} \dfrac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2} \underset{x\to0}{=} \dfrac{o(x^2)}{x^2} \underset{x\to0}{=} o(1)$. Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ admet 0 comme limite en 0 donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. Les fonctionx $x \mapsto e^x - e^{-x}$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^\times$, $x \neq 0$ donc $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$.
   $f'(x) = \dfrac{(e^x - e^{-x})'x - (e^x - e^{-x})x'}{x^2} = \dfrac{h(x)}{x^2}$.
4. $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} = +\infty$ **d'où le tableau de variation**

	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		$-$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	|	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0 2	$\nearrow$	$+\infty$

5. $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2} = \dfrac{x - \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{x^2} = \dfrac{x(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})}{x^2(e^x + e^{-x})}$
$\underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})}{x^2}$
On effectue un $DL_2(0)$ du numérateur ce qui nous donne $\dfrac{x(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{o(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} o(1)$ donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\to} 0 = f'(0)$ d'où la continuité de f' en 0.
6. Il s'agit du quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{\times}$.

Exercice 3

1. $\mathcal{H}_n$: u_n existe et appartient à $[0,1]$.
Inialisation : $\mathcal{H}_0$ est vraie car u_0 existe (!) et appartient à $[0,1]$.
Hérédité : supposons $\mathcal{H}_n$ vraie ; $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1+u_n}{2} \leqslant \dfrac{1+1}{2} = 1$ ce qui montre que $\sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$ existe et $\sqrt{\dfrac{1}{2}} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ d'où $u_{n+1} \in [0,1]$ ce qui démontre $\mathcal{H}_{n+1}$ et par suite ceci achève la récurrence.
2. **Première méthode**
   (a) On commence par remarquer que $x > -1$ puis que
   $$\frac{1}{4 \times \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1}{16(\dfrac{1+x}{2})} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leqslant 1 + x \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{7}{8}$$
   d'où $S = [\dfrac{-7}{8}, +\infty[$.
   (b) On pose $a(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}} - x$. Cette fonction est dérivable sur $[0,1]$ car $x \mapsto \dfrac{1+x}{2}$ est dérivable sur $[0,1]$, $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{1+x}{2} \in]0, +\infty[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
   $a'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}} - 1 \leqslant 0$ $\forall x \in [0,1]$ d'après la question précédente. On obtient le tableau de variation suivant qui montre que la fonction a est négative sur $[0,1]$ et $a(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

	0		1
$a'(x)$		$-$	
$a(x)$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

   (c) Puisque $u_n \in [0,1]$, nous pouvons utiliser l'inégalité précédente : $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \geqslant u_n$ donc la suite u est croissante.
   (d) La suite u est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers une limite $l \in [0,1]$ qui satisfait l'équation $\sqrt{\dfrac{1+l}{2}} = l$. D'après la question b, on en déduit que $l = 1$.
3. **Deuxième méthode**
   (a) $1 - u_{n+1} = 1 - \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} = \dfrac{1 - \dfrac{1+u_n}{2}}{1 + \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}}$ (merci la quantité conjuguée).
   D'où $1 - u_{n+1} = \dfrac{1-u_n}{1 + \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}}$ et puisque $u_n \geqslant 0$, on a :$1 + \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \geqslant 1 + \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ ce qui nous fournit l'inégalité demandée.
   (b) $\mathcal{Q}_n : 1 - u_n \leqslant (\dfrac{1}{1+\sqrt{\dfrac{1}{2}}})^n (1 - u_0)$.
   Inialisation : $\mathcal{Q}_0$ est vraie car
   $(\dfrac{1}{1+\sqrt{\dfrac{1}{2}}})^0 (1 - u_0) = 1 - u_0 \geqslant 1 - u_0$.
   Hérédité : supposons $\mathcal{Q}_n$ vraie ; $1 - u_n \leqslant (\dfrac{1}{1+\sqrt{\dfrac{1}{2}}})^n (1 - u_0)$ et la question précédente montre que

$1-u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}(1-u_n) \leqslant \dfrac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}(\dfrac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{2}}})^n(1-u_0) = (\dfrac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{2}}})^{n+1}(1-u_0)$ cqfd.

(c) Puisque $u_n \in [0,1]$ pour tout n, on a
$0 \leqslant 1-u_n \leqslant (\dfrac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{2}}})^n(1-u_0)$.
La suite $((\dfrac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{2}}})^n(1-u_0))_{n\geqslant 0}$ est géométrique dont la raison est en valeur absolue strictement plus petite que 1. Le théorème d'encadrement montre que $1-u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ d'où u converge vers 1.

(d)
```
programm ds;
uses crt;
var k, n : integer;
var u : real;
begin
writeln ('donner n');
readln(n);
writeln ('donner u(0)');
readln(u);
n := n - 1;
u := 1 - u;
For k = 0 to n do
u := (1/(1 + sqrt(1/2))) * u;
writeln ('le résultat est ', u);
repeat until keypressed :
end.
```

Exercice 4

Préliminaire

Il s'agit d'une suite récurrente d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $x^2 = \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ qui possède comme racines $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $\frac{1-\sqrt{13}}{6}$. La suite x est une combinaison de deux suites géométriques de raison appartenant à $]-1,1[$ ce qui implique que chacune d'elle converge vers 0 donc la suite x converge vers 0.

Question 1

1.a : $\mathcal{R}_n$: u_n et u_{n+1} sont bien définis et vérifient : $1 \leqslant u_n$ et $1 \leqslant u_{n+1}$

(a) **Inialisation** : $\mathcal{R}_0$ est vraie d'après l'énoncé
Hérédité : supposons $\mathcal{R}_n$ vraie :$1 \leqslant u_n$ et $1 \leqslant u_{n+1}$ donc $u_{n+2} = \sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n+1}}$ existe bien et $u_{n+2} \geqslant \sqrt{1}+\sqrt{1} = 2 \geqslant 1$. Bien entendu u_{n+1} est bien définie et vérifie $1 \leqslant u_{n+1}$ ce qui achève la preuve de $\mathcal{R}_{n+1}$.

1.b : Si la suite u converge vers l alors $l \geqslant 1$ et u_{n+1} ainsi que u_n converge vers l. Par conséquent, $u_{n+2} = \sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n+1}}$ converge vers $\sqrt{l}+\sqrt{l} = 2\sqrt{l}$. Or u_{n+2} converge vers l, ce qui montre que $l = 2\sqrt{l} \Leftrightarrow l^2 = 4l$ (car $l>0$) $\Leftrightarrow l = 4$ (toujours grâce à $l>0$).

Question 2

2.a : $\frac{1}{2}\sqrt{u_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \sqrt{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 2 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 4$

2.b : $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n}-1 \Leftrightarrow \sqrt{u_n} = 2(v_n+1)$ donc $u_n = 4(v_n+1)^2$ et l'on a
$4(v_{n+2}+1)^2 = 2v_{n+1}+2+2v_n+2 \Leftrightarrow 4v_{n+2}^2+8v_{n+2}+4 = 2v_{n+1}+2v_n+4$
$\Leftrightarrow 2v_{n+2}^2+4v_{n+2} = v_{n+1}+v_n \Leftrightarrow 2v_{n+2}(v_{n+2}+2) = v_{n+1}+v_n$
$\Leftrightarrow v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})}$
On sait que $u_n \geqslant 1 \Rightarrow v_n \geqslant -\frac{1}{2} \Rightarrow 2+v_{n+2} \geqslant \frac{3}{2} \Rightarrow 2(2+v_{n+2}) \geqslant 3$.
Ensuite $|v_{n+2}| = \dfrac{|v_{n+1}+v_n|}{|2(2+v_{n+2})|} = \dfrac{|v_{n+1}+v_n|}{|2(2+v_{n+2})|} \leqslant \dfrac{|v_{n+1}+v_n|}{3}$
$\leqslant \frac{1}{3}|v_{n+1}|+\frac{1}{3}|v_n|$.

2.c : $\mathcal{C}_n$: $|v_n| \leq x_n$ et $|v_{n+1}| \leq x_{n+1}$

(a) **Inialisation** : $\mathcal{C}_0$ est vraie car $|v_0| = x_0 \leqslant x_0$ et $|v_1| = x_1 \leq x_1$
Hérédité : supposons $\mathcal{C}_n$ vraie :$|v_n| \leq x_n$ et $|v_{n+1}| \leq x_{n+1}$ donc $|v_{n+2}| \leqslant \frac{1}{3}|v_{n+1}|+\frac{1}{3}|v_n| \leqslant \frac{1}{3}x_{n+1}+\frac{1}{3}x_n = x_{n+2}$. Bien entendu $|v_{n+1}| \leq x_{n+1}$ ce qui achève la preuve de $\mathcal{C}_{n+1}$.
Pour tout entier n, on a : $0 \leqslant |v_n| \leq x_n$ et la suite x converge vers 0 donc le théorème d'encadrement montre que la suite v converge vers 0. La question 2.a nous permet de conclure que u converge vers 4.