Exercice 1

1. $\exp\ln((x-1)^2)+2\exp(2\ln(x+1))-4$
   $=(x-1)^2+2(x+1)^2-4=3x^2+2x-1$
2. Il faut que $(x-1)^2>0$ et que $x+1>0$.
   On doit donc exiger que $x\neq 1$ et $x>-1$, c'est-à-dire que $x\in]-1;1[\cup]1;+\infty[$.
   Ensuite -1 et $\dfrac{1}{3}$ sont les deux racines du trinôme $3x^2+2x-1$.
   Par conséquent, $x=\dfrac{1}{3}$ est l'unique solution de l'équation.

Exercice 2

1. $y=(1+\dfrac{300}{100})^{10}x=4^{10}x$ et $z=(1-\dfrac{25}{100})^{10}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}y$
2. On a $z=4^{10}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}x=3^{10}$.
   Soit a le coefficient multiplicateur associé à l'inflation moyenne annuelle subi par ce produit pendant 20 ans.
   On a $z=a^{20}x\Leftrightarrow a^{20}=3^{10}\Leftrightarrow a=3^{\frac{10}{20}}=\sqrt{3}$.
   L'inflation moyenne est $(\sqrt{3}-1)\times 100$.

Exercice 3

1. C'est un simple calcul.
   (a) $P(-1)=0, P'(-1)=0, P''(-1)=6(1+a)\neq 0$ d'après l'énoncé , donc -1 est un zéro d'ordre 2.
   (b) Le polynôme P est divisible par $(x+1)^2$. La division de P par $(x+1)^2$ nous fournie l'égalité suivante
   $P(x)=(x+1)^2\left(x^2-x\,(a+2)+2a\right)$.
   Calculons le discriminant du trinôme
   $x^2-x\,(a+2)+2a$.
   $\Delta=(a+2)^2-4\times 2a=a^2-4a+4=(a-2)^2$.
   Les racines du trinôme sont 2 et $-a$ d'où
   $x^2-x\,(a+2)+2a=(x-2)\,(x-a)$
   et par suite, $P(x)=(x+1)^2\,(x-2)\,(x-a)$.

   (a) $P(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2$.
   $P(-1)=0, P'(-1)=0, P''(-1)=0$,
   $P^{(3)}(-1)=-18$ donc -1 est une racine d'ordre 3.
   (b) $P(x)=(x+1)^3\,S(x)$ avec $d^\circ S=1$ donc
   $S(x)=ax+b$.
   Le coefficient dominant (resp. constant) de $(x+1)^3\,(ax+b)$ est $1\times 1\times 1\times a=a$ (resp. a) et celui de P est 1 (resp. -2) donc $a=1$ et $b=-2$.
   On obtient ainsi la factorisation de P
   $P(x)=(x-2)\,(x+1)^3$

Exercice 4

1. L'expression $f(x)$ n'est définie pas si $e^{2x}-4e^x+3=0$.
   On pose $X=e^x$ et on obtient l'équation
   $X^2-4X+3=0$ donc les racines sont $X=3$ et $X=1$. D'où $f(x)$ n'existe pas si $e^x=1$ ou $e^x=3$ c'est-à-dire $x=0$ ou $x=\ln 3$.
   Ainsi $\mathcal{D}_f=]-\infty;0[\cup]0;\ln 3[\cup]\ln 3;+\infty[$.

   (a) On pose $X=e^x$ d'où l'inéquation (E) devient
   l'inéquation $(E'):X^2+X-6\leqslant 0$.
   Le trinôme du membre de gauche de l'inégalité possède deux racines : -3 et 2.
   Donc (E') est vérifiée ssi $X\geqslant -3$ et $X\leqslant 2$.
   Puisque $X=e^x>0$, la condition $X\geqslant -3$ est toujours vérifiée.
   Ainsi l'inéquation (E) est vérifiée ssi $e^x\leqslant 2$ c'est-à-dire $x\leqslant \ln 2$.
   (b) On pose le même changement de variable. On obtient que $X\leqslant 1$ ou $X\geqslant 3$, donc l'inéquation (E') est vérifiée ssi $e^x\leqslant 1$ ou $e^x\geqslant 3$, c'est-à-dire $x\in]-\infty;0[\cup]\ln 3;+\infty[$.

2. $1+\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x-1}=\dfrac{x^2+x\,(a+b-4)+3-3b-a}{(x-1)\,(x-3)}$
   Donc $\begin{cases} a+b-4=1\\ 3-3b-a=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=5\\ a+3b=9\end{cases}$
   $\Leftrightarrow L_2\leftarrow L_2-L_1\begin{cases} a+b=5\\ 2b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=2\\ a=3\end{cases}$

Exercice 5

1. $Q(-1)=0$ et $Q'(-1)=10$. Ainsi 1 est une racine d'ordre 1 et $(x-1)\mid P(x)$. La division de P par $(x-1)$ nous donne $P(x)=$

$(x-1)(3x^2-x-2)$.

Le trinôme $3x^2-x-2$ possède deux racines : 1 et $-\dfrac{2}{3}$. On obtient ainsi la factorisation

$3x^2-x-2=3(x-1)(x+\dfrac{2}{3})$, d'où

$Q(x)=(x-1)\,(3x+2)\,(x+1)\,.$

(a) $P(-1)=P'(-1)=0, P''(-1)=-1$ donc -1 est une racine de multiplicité 2.

(b) Définition 4.4 et théorème 4.2 du cours.
$d^\circ S=4-2=2$.

(c) La division euclidienne de $P(x)$ par $(x+1)^2$, ce qui nous donne $P(x)=\left(3x^2-13x-10\right)(x+1)^2$

Le trinôme $3x^2-13x-10$ possède deux racines : 5 et $-\dfrac{2}{3}$ d'où

$3x^2-13x-10=3(x-5)(x+\dfrac{2}{3})$.

On en déduit que $P(x)=(3x+2)\,(x-5)\,(x+1)^2$.

(a) Les questions précédentes montrent que

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{-1;-\dfrac{2}{3};1\}$ et $f(x)=\dfrac{(x-5)\,(x+1)}{(x-1)}$

(b) On pose le tableau de signe de f.

x	$-\infty$ $\quad -1$	$-\frac{2}{3}$	1	5	$+\infty$
$x-5$	$-$ $\quad 0$	$-$	$-$	$-\ 0$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-\ 0$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$ $\quad 0$	$+$ $\quad \Vert$	$-\ \Vert$	$-\ 0$	$+$

ce qui montre que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-1;-\dfrac{2}{3}[\cup[5;+\infty[$

(c) $x+a+\dfrac{b}{x-1}=\dfrac{x^2+x\,(a-1)+b-a}{x-1}$

et $f(x)=\dfrac{x^2-4x-5}{x-1}$. On obtient ainsi le système

$\begin{cases} a-1=-4 \\ b-a=-5 \end{cases},\Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-8 \end{cases},$

d'où $f(x)=x-3-\dfrac{8}{x-1}$ et la fonction f est croissante sur $[5;+\infty[$ (comme somme de fonctions croissantes).