www.mathematiques.ht.st

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 2 pages et de sept exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - 4x - 5 = 0$.
2. En déduire les solutions réelles des équations suivantes :
   (a) $(\ln x)^2 - 4(\ln x) - 5 = 0$.
   (b) $e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$.
3. Soit $P(x)$ le polynôme défini par $P(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$.
   (a) Vérifier que $P(x) = (x+1)(x^2 - 4x - 5)$.
   (b) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 2

1. Compléter les égalités suivantes :
   (a) $2\ln 3 + \ln 2 = \ln ....$
   (b) $\ln 100 + 3\ln \frac{1}{10} = \ln ....$
2. Simplifier les expressions suivantes
   $A = \ln e^{3x} + \ln e^2$. $B = e^{-3\ln x} \times e^{\ln x^2}$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

a) $3e^x - 2 = 0$ *b*) $\ln(x-1) < \ln(2x+3)$

c) $\ln(\frac{1}{2}x - 1) - \ln(4x) = 0$ *d*) $e^{(2x-1)} - e^{4x+5} \geq 0$.

Exercice 4

Soit $P(x)$ le polynôme défini par

$$P(x) = 4x^3 + ax^2 + bx - 4$$

et qui satisfait aux conditions suivantes :

$$P(2) = 0 \text{ et } P(-1) = 0.$$

1. Déterminer a et b.

2. Développer $(x-2)(x+1)(2x+1)$.
3. Résoudre l'équation $P(x)=0$.
4. Résoudre l'inéquation $P(x)>0$.

Exercice 5

1. Donner la dérivée de chacune des fonctions suivantes :
$$f(x)=x^3-4x+3 \qquad g(x)=x\ln x-x$$
2. Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes :
$$h(x)=e^{3x}+\frac{1}{x} \qquad k(x)=e^{3x}+5x-1$$

Exercice 6

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par
$$g(x)=-x^2-2+2\ln x$$
(où ln désigne le logarithme népérien).
   (a) Si g' désigne la dérivée de la fonction g, calculer $g'(x)$.
   (b) Etudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.
   (c) Déduisez-en le signe de g sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :
$$f(x)=-x+5-2\frac{\ln x}{x}.$$
   (a) Etudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0.
   (b) Calculer $f'(x)$, puis montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
   (c) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[1;5]$.

Exercice 7

Durant 5 ans, on place un capital de 10 000 euros à un taux fixe annuel de 8%. Combien obtient-on d'intérêts au bout de ces 5 années?
A quel taux faut-il placer ce même capital pendant 7 ans pour obtenir la même valeur acquise?