PHEC1 devoir surveillé 8 2001-2002

www.mathematiques.ht.st

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 2 pages et de deux exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1
Pour tout entier naturel n, on note : $w_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \; dt$.

1. Calculer w_0 et w_1.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer pour tout entier naturel n : $w_n \geq 0$.
   En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que:
$$w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n t \;\sin^2 t \; dt.$$
   En déduire : $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$.
5. Montrer pour tout entier naturel n, en utilisant **2.** et **4.** :
$$0 < \frac{n+1}{n+2}\, w_n \leq w_{n+1} \leq w_n$$
   En déduire : $w_{n+1} \sim w_n$ quand $n \to +\infty$.
   (a) Montrer, en utilisant **4.**, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (n+1)w_n w_{n+1}$ est constante.
   (b) Calculer u_0. En déduire que $w_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ quand $n \to +\infty$.
   (c) La série $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ est-elle convergente?

Exercice 2
Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p , $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1-p$.
On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

   (a) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

   (b) Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^\times)^2$ de la façon suivante :
pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^\times)^2$,$(X = i$ et $Y = j)$ est l'évènement
$''$ les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)^{ieme}$ est blanche
ou
les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)^{ieme}$ est verte $''$.
Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$

2. Montrer, pour tout (i, j) de $(\mathbb{N}^\times)^2$:

$$P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

   (b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

   (b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$.

3. Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale (on pourra faire une étude de fonction).

   (a) Etablir que, si $p \neq \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes (on pourra envisager $P(X = 1$ et $Y = 1))$.

   (b) Démontrer que, si $p = \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.