La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 3 pages, de deux exercices et d'un problème indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1

Soient X,Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On suppose que X,Y et Z suivent la loi $\mathcal{U}_{[|1,n|]}$ c'est-à-dire que :

$$\forall k \in [|1,n|]\,, P(X=k) = P(Y=k) = P(Z=k) = \frac{1}{n}.$$

1. On suppose seulement dans cette question que $n=3$.
   (a) Déterminer la loi de $X+Y$.
   (b) Calculer $P(X+Y=Z)$ (on considérera le système complet d'évènements $\{Z=1,Z=2,Z=3\}$).
2. Dorénavant n est un entier quelconque.
   (a) Montrer que : $\forall k \in [|2,n+1|]\,, P(X+Y=k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
   (b) Montrer que : $\forall k \in [|n+2,2n|]\,, P(X+Y=k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.
3. Utiliser la formule des probabilités totales avec les évènements $(Z=k)_{k\in[|1,n|]}$ pour déduire de la première question que : $P(X+Y=Z) = \dfrac{n-1}{2n^2}$.
   (a) Montrer que la variable aléatoire $T=n+1-Z$ suit la loi $\mathcal{U}_{[|1,n|]}$.
   (b) Pourquoi T est-elle indépendante de X et de Y ?
   (c) En faisant intervenir la variable T et en untilisant la deuxième question, déterminer la probabilité $P(X+Y+Z=n+1)$.

Problème

Le but de ce problème est de calculer les puissances $n^{ième}$ d'une certaine matrice et d'appliquer ce calcul à un problème de probabilité.

Partie 1

On définit les matrices A,B par $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{12}A$.

On considère également le système (S_λ) $\begin{cases} (4-\lambda)x + 3y + 3z = 0 \\ 4x + (3-\lambda)y + 6z = 0 \\ 4x + 6y + (3-\lambda)z = 0 \end{cases}$

où λ est un nombre réel.

1. (a) Montrer qu'il existe 3 nombres réels distincts a,b,c tel que si $\lambda \notin \{a,b,c\}$, le système (S_λ) est de Cramer. Quelles sont dans ce cas les solutions de ce système?
   (b) La matrice A est-elle inversible?
   (c) Déterminer les solutions de (S_λ) si $\lambda \in \{a,b,c\}$.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Vérifier que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. En déduire une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
   (c) Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (d) Déterminer l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

   (a) Calculer B puis exprimer B^n en fonction de A^n.
   (b) En déduire que l'expression de B^n en fonction de n.

Partie 2

Un distributeur de jouets distingue trois catégories de jouets :
T : les jouets traditionnels tels que poupées, peluches ;
M : les jouets liés à la mode inspirés directement d'un livre, un film, une émission ;
S: les jouets scientifiques vulgarisant une technique récente.
Il estime que
(i) Le client qui a acheté un jouet traditionnel une année pour Noël choisira, l'année suivante, un jouet de l'une des trois catégories avec une équiprobabilité ;
(ii) Le client qui a acheté un jouet inspiré par la mode optera l'année suivante pour un jouet T avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, pour un jouet S avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$;
(iii) pour un jouet T avec la probabilité$\dfrac{1}{4}$, pour un jouet M avec la probabilité$\dfrac{1}{2}$, pour un jouet S avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$.
Le volume des ventes de ce commerçant vient de se composer d'une part $p_0 = \dfrac{45}{100}$ de jouets de la catégorie

T, d'une part $q_0 = \dfrac{25}{100}$ de jouets de la catégorie M et d'une part $r_0 = \dfrac{30}{100}$ de jouets de la catégorie S. On désigne par p_n,q_n,r_n, les probabilités respectives des jouets T, M, S dans les ventes du distributeur le n-ième Noël suivant.

1. Montrer que le triplet $(p_{n+1},q_{n+1},r_{n+1})$ s'exprime en fonction du triplet (p_n,q_n,r_n).
2. Déterminer une marice C telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $\forall n \geq 0$, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.
4. Exprimer (p_n,q_n,r_n) en fonction de n.
5. Quelles parts à long terme les trois catégories de jouets représenteront-elles dans la vente si l'attitude des consommateurs reste constante?

Exercice 2

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts ($n \geq 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0,1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est $1 - p$.

1. Soit X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels.

   (a) Quelle est la loi de X?

   (b) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

2. Après ces n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.
   Quelles sont les valeurs prises par Z?

   (a) Montrer que $P(Z = 0) = P((X = 0) \cap (Y = 0))$. En déduire $P(Z = 0)$.

   (b) Montrer que $P(Z = 1) = P((X = 1) \cap (Y = 0)) + P((X = 0) \cap (Y = 1))$. En déduire $P(Z = 1)$.

   (c) Montrer que $P(Z = 1) = np(1 - p)^{2n-2}(2 - p)$.

3. On pose $T_k = Y/(X = k)$ (T_k est ainsi le nombre de personnes contactées lors du second appel parmi les personnes non contactées au premier appel).

   (a) Quelle est la loi de T_k?

   (b) En déduire le calcul de la probabilité conditionnelle $P((Y = h)/(X = k))$, pour k appartenant à $\{0,1,\ldots,n\}$ et h à $\{0,1,\ldots,n - k\}$.

   (a) Démontrer $P(Z = s) = \sum_{k=0}^{s} P((X = k) \cap (Y = s - k))$.

   (b) Calculer $P(Z = s)$.

   (c) Montrer que: $C_n^k C_{n-k}^{s-k} = C_n^s C_s^k$ puis montrer que Z suit une loi binomiale de paramètres n et $p(2 - p)$. (On factorisera au maximum l'expression obtenue à la question ii), on appliquera la formule du binôme puis on remarquera que $(1 - p)^{2n-2s} = ((1 - p)^2)^{n-s}$ et que $1 - p(2 - p) = (1 - p)^2$).