www.mathematiques.ht.st

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 2 pages et de cinq exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1
On considère un nombre entier naturel q. On rappelle la formule du triangle de Pascal, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

1. En raisonnant par récurrence sur n, établir la formule suivante : $\forall\, n \geq q,\ \sum_{k=q}^{n} C_k^q = C_{n+1}^{q+1}$.
2. Expliciter C_k^q en fonction de k lorsque $q = 1,2,3$.
3. En déduire une expression factorisée des quatre sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k, \sum_{k=2}^{n} k(k-1), \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2).$$

Exercice 2
Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{5u_n + 1}$ et $u_0 > 0$.

1. Montrer que $\forall\, n \geq 0, u_n$ existe et $u_n \geq 0$.
2. Etudier la monotonie de la suite u.
3. Montrer que la suite u est convergente.
   (a) Exprimer $u_{n+1} - \dfrac{u_n}{5}$ en fonction de u_n.
   (b) En déduire que $\forall\, n \geq 0,\ u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{5}$
   (c) Montrer que $\forall\, n \geq 0,\ 0 \leq u_n \leq (\dfrac{1}{5})^n u_0$. En déduire la limite de la suite u.

Exercice 3
On introduit deux suites a et b définies par $\forall n \geq 0$ $\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = \dfrac{3}{5}a_n + \dfrac{2}{5}b_n \\ b_{n+1} = \dfrac{2}{5}a_n + \dfrac{3}{5}b_n \end{array}\right.$ avec $a_0,\ b_0 \in \mathbb{R}$ et $a_0 \geq b_0$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On considère la suite t dont le terme général est donné par $t_n = a_n - b_n$.

(a) Montrer que la suite t est géométrique. En déduire t_n en fonction de n et de t_0.
(b) En déduire que $\forall n \geq 0$, $a_n \geq b_n$ et que la suite $(a_n - b_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.
(c) Exprimer $a_{n+1} - a_n$ (resp. $b_{n+1} - b_n$) en fonction de $a_n - b_n$. En déduire les variations des deux suites a et b.
(d) Montrer que les deux suites a et b convergent vers une même limite.

(a) Montrer que la suite a est une suite récurrente d'ordre 2.
(b) En déduire l'expression de a_n en fonction de n, a_0 et b_0.
(c) Calculer la limite de la suite a.
(d) On pose $W_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Calculer W_n en fonction de n, a_0 et b_0.

Exercice 4
On considère une suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$
   (b) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

   (a) Pour tout entier k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_k^2}$
   puis que, $u_n^2 = 2n + 1 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_k^2}$.
   (c) Montrer que: $\forall n \in N^{\times}$, $u_n^2 \geq 2n+1$. En déduire la limite de la suite $(u_n^2)_{n\geq 0}$ puis de la suite u..

Exercice 5
On considère une urne de taille N ($N > 10$) contenant r boules blanches indifférenciées et N - r boules noires indifférentiées ($0 < r < N$). Dans cette urne on prélève toutes les boules une à une et SANS remise.

1. On supose dans cette question que $N = 4$, $r = 1$.
   (a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
   (b) Calculer la probabilité pour que la dernière boule blanche apparaisse au premier (resp. second, resp. troisième, resp. quatrième) prélèvement.
2. On supose dans cette question que $N = 4$, $r = 2$.
   (a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
   (b) Calculer la probabilité pour que la dernière boule blanche apparaisse au second (resp. troisième, resp. quatrième) prélèvement.
3. On suppose dans cette question que N est un entier quelconque et que $r = 1$. Calculer la probabilté que la dernière boule blanche apparaisse au $k^{ème}$ prélèvement.
4. Etude du cas général ($1 < r < N$).
   (a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
   (b) Soit k un nombre ($r \leq k \leq N$). Calculer la probabilité pour que la dernière boule blanche apparaisse au $k^{ème}$ prélèvement (Indication : il faut qu'au cours des $k-1$ premiers prélèvements soient apparues $r-1$ boules blanches (et donc $k-r$ boules noires) et qu'au $k^{ème}$ prélèvement soit apparu une boule blanche).