PHEC1 devoir surveillé 2 2001-2002

www.mathematiques.ht.st

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 2 pages et de quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1

1. Les fonctions suivantes ont-elles une limites en a ?
   (a) $a = -2\,;\ f(x) = \dfrac{x^3+4x^2+x-6}{2x^3+9x^2+13x+4}$.
   (b) $a = -\infty\,;\ g(x) = \ln(\dfrac{-3x^{10}+6x^3-1}{x^3-8})$.
2. Donner un équivalent en a des fonctions suivantes :
   (a) $a = +\infty\,;\ h(x) = \dfrac{\ln(1+\frac{4}{x})}{\sin(\frac{2}{x^3})}$.
   (b) $a = 0\,;\ k(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\tan x}$.
3. Déterminer l'asymptote en $+\infty$ de $l(x) = \dfrac{2x^6+7x^3-5}{x^3+4}$.

Exercice 2

Soit $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

1. (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et étudier sa parité.
   (b) Eudier la continuité de f sur $\mathcal{D}_f$.

   (a) Déterminer les limites de f au bornes.
   (b) Quelle est la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et -∞ ?
   (c) Déterminer les branches infinies de f.

   (a) Calculer $f'(x)$ lorsque $x \in \mathcal{D}_f$.
   (b) Déterminer les asymptotes de f' en $+\infty$ et -∞.

Exercice 3
On considère la fonction $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'image de l'intervalle $[1; e]$ est contenu dans $[1; e]$.

   (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente, si l'on suppose $x \in \mathcal{D}_f$,. à l'équation $(E)\colon 2 - \ln x = x^2$

   (b) En introduisant une fonction auxiliaire correspondant à l'équation (E), montrer que l'équation $f(x) = x$ ne possède qu'une seule solution sur l'intervalle $[1; e]$.

Exercice 4
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^\times$.

   (b) La fonction est-elle continue en 0 ?

   (c) Quelles sont les limites de f en $+\infty$ et -∞ ?

   (d) Déterminer le signe de f.

   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$ puis calculer $f'(x)$ lorsque $x \neq 0$.

   (b) Calculer les limites de f' en $+\infty$ et -∞.

   (c) Dresser le tableau de variation de f. (on précisera les limites aux bornes).

   (a) Donner un équivalent de f et de f' en $+\infty$

   (b) Donner l'équation de l'asymptote de f en $+\infty$.

   (c) Quelle est l'équation de l'asymptote de f' en $+\infty$?