

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 3 pages et de 4 exercices indépendants (3 ESC Lyon 1995 et 1 Ecricome 1999) qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1 (ESC Lyon 1995)

On considère la matrice carrée d'ordre 3 réelle $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) A est-elle inversible?

(b) Soit λ un nombre réel. Calculer $A - \lambda I_3$, où $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Montrer qu'il existe une seule valeur a de λ telle que si $\lambda \neq a$ alors $A - \lambda I_3$ est inversible et si $\lambda = a$ alors $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

(d) Déterminer les solutions X de l'équation $(A - aI_3)X = 0$.

(a) Déterminer la matrice B telle que $A = 3I_3 + B$.

(b) Calculer B^2 puis B^n lorsque $n \geq 1$

(c) En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'expression de A^n en fonction de n .

Exercice 2 (ESC Lyon 1995)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(1+x)$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0; +\infty[$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Montrer que f est de classe C^2 sur $[0; +\infty[$ et calculer, pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

(b) Etudier les variations de f' , puis celle de f .

(c) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0; +\infty[$.

(d) Déterminer le signe de $f(x) - x$ suivant les valeurs de x .

2. On suppose dans cette question que : $u_0 \in]e-1; +\infty[$.

(a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in]e-1; +\infty[$.

(b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n \leq u_{n+1}$.

(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. On suppose dans cette question que : $u_0 \in [0; e - 1]$.

Etudier la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3 (Ecricome 1999.)

On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

On note P_k (resp. F_k) l'évènement : "on obtient pile (resp. face) au $k^{\text{ème}}$ lancer".

Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, $P_1 F_2$ à la place de $P_1 \cap F_2$.

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k - 1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $P(X = 2)$.
 - (a) En remarquant que $(X = 3) = P_1 P_2 F_3 \cup F_1 P_2 F_3$, calculer $P(X = 3)$.
 - (b) Sur le modèle de la question précédente, écrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'évènement $(X = k)$ comme réunion de $(k - 1)$ évènements incompatibles.
 - (c) Déterminer $P(X = k)$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
Calculer $P(X = 0)$.
2. On se propose, dans cette question, de retrouver le résultat de la question 2. c: par une autre méthode.
 - (a) Montrer que, k désignant un entier supérieur ou égal à 3, si le premier lancer est un pile, alors il faut et il suffit que $P_2 P_3 \dots P_{k-1} F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.
 - (b) En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales que:

$$\forall k \geq 3, P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k - 1) + \frac{1}{2^k}$$

- (c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$.
Montrer que la suite $(u_k)_{k \geq 2}$ est arithmétique. Retrouver le résultat annoncé.

Exercice 4 (ESC Lyon 1995.)

Dans un jeu, il y a n numéros (de 1 à n) dont p numéros gagnants choisis à l'avance et connus du seul meneur de jeu. On suppose $n \geq 1$, $p \geq 1$ et $p \leq \frac{n}{3}$.

Dans la première phase du jeu, le joueur tire au hasard, successivement, p numéros différents.

Le meneur de jeu dévoile alors p numéros perdants parmi les $n - p$ numéros qui n'ont pas été tirés.

Dans la deuxième phase du jeu, le joueur a le choix entre deux stratégies.

Stratégie A : il garde les p numéros qu'il a tirés.

Stratégie B : il échange les p numéros contre p nouveaux numéros tirés au hasard, successivement, parmi les $n - 2p$ numéros qui n'ont été ni tirés ni dévoilés durant la première phase.

Le but de l'exercice est de déterminer laquelle de ces deux stratégies permet d'espérer obtenir le plus de numéros gagnants.

1. Etude directe d'un cas simple :

On suppose ici : $n = 3$, $p = 1$.

Calculer la probabilité d'obtenir le numéro gagnant avec la stratégie A, puis avec la stratégie B.

2. Etude du cas général.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de numéros gagnants parmi les p numéros tirés dans la première phase.

- (a) i. Déterminer la loi de X et $E(X)$.

ii. En déduire les formules :

$$(1) \sum_{k=0}^p C_p^k C_{n-p}^{p-k} = C_n^p \text{ et } (2) \sum_{k=0}^p k C_p^k C_{n-p}^{p-k} = \frac{p^2}{n} C_n^p.$$

On suppose désormais , dans toute la suite de l'exercice , que le joueur utilise la stratégie B.

Pour $1 \leq i \leq p$, on note Z_i la variable aléatoire égale à 1 si le $i^{\text{ème}}$ numéro tiré dans la deuxième phase est gagnant , à 0 sinon.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de numéros gagnants parmi les p numéros tirés dans la deuxième phase.

(b) Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq p$ et pour $1 \leq i \leq p$: calculer $P(Z_i = 1/X = k)$.

(c) Pour $1 \leq i \leq p$, démontrer que :

$$P(Z_i = 1) = \frac{1}{(n-2p)C_n^p} \sum_{k=0}^p (p-k) C_p^k C_{n-p}^{p-k}.$$

(d) En utilisant les formules démontrées en **b)** , vérifier que :

$$E(Z) = \frac{p^2(n-p)}{n(n-2p)}.$$

(e) Des stratégies A et B, laquelle est préférable?