Outils élémentaires sur le calcul algébrique et les fonctions

Abdellah Bechata

Contents

Notations

Définition 0.1
Soient E un ensemble, A, B deux sous-ensembles de E et x un élément de E. On note

- *$x \in A$ si l'élément x appartient à A.*
- *$x \notin A$ si l'élément x n'appartient pas à A.*
- *$A \subset B$ si tout élément de A est un élément de B c'est-à-dire $x \in A$ alors $x \in B$.*
- *$A \subsetneq B$ s'il existe un élément y de A qui ne soit pas un élément de B c'est-à-dire il existe $y \in A$ tel que $y \notin B$.*

Définition 0.2
L'ensemble noté $\varnothing$ est appelé ensemble vide et est constitué d'aucun élément.

Voici quelques ensembles standards

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels c'est-à-dire $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..\}$
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres relatifs c'est-à-dire des entiers naturels ainsi que leurs opposés.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels c'est-à-dire de tous les nombres que vous avez rencontrés dans votre scolarité. Par exemple : 2, -13, $\dfrac{\ln 3}{2003}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, π, e^6 etc.

1 Notions algébriques

Ce chapitre est à connaitre par coeur, il sera d'utilisation permanente cette année.

1.1 Objets usuels associés aux réels

Valeur absolue

On considère la droite réelle munie d'un repère d'origine 0, d'unité et de sens fixé. Si x désigne un nombre réel quelconque, on appelle valeur absolue de x le réel noté $|x|$ défini comme étant la distance de x à 0. Je laisse le lecteur vérifier aisément que .

Proposition 1.1 (propriétés remarquables de la valeur absolue)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0. \end{cases} \quad |x| \geqslant 0 \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad |x \times y| = |x| \times |y| \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad |x^n| = |x|^n$$

et la distance entre x et y est égale à $|x - y|$

Remarque 1.1
Pour cette dernière propriété, il suffit que le lecteur fasse un petit graphique.

Puissances entières d'un réel x^n $(n \in \mathbb{Z})$

Définition 1.1 (n positif)
Soit x un nombre réel et n un entier positif, on pose $x^0 = 1$ (lorsque $x \neq 0$) et $x^n = \underbrace{x \times x \times ... \times x}_{n \text{ fois}}$ si $n \geqslant 1$.

Définition 1.2 (n négatif)
Soit x un nombre réel et n un entier négatif, on pose $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$. (Par exemple, $x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$)

Proposition 1.2 (Règles de calcul)
$\forall n, m \in \mathbb{Z}$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}^\times$

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^n \times a^m = a^{n+m} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n \quad (a^n)^m = a^{n \times m}$$

Logarithme népérien

Nous admettrons l'existence du logarithme népérien $\ln x$ de tout réel x strictement positif.

Proposition 1.3 (propriétés remarquables du logarithme)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^\times \quad \begin{array}{ll} \ln(a\times b) = \ln a + \ln b & \ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b \\ \ln(\frac{1}{a}) = -\ln a & \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln a^n = n\ln a \\ \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b & \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b \\ \ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1 & \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e \textit{ avec } e \simeq 2.718 \end{array}$$

Exponentiel

Nous admettrons l'existence de l'exponentielle de tout réel x.

Proposition 1.4 (propriétés remarquables de l'exponentielle)

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{ll} \exp a \times \exp b = \exp(a+b) & \dfrac{\exp a}{\exp b} = \exp(a-b) \\ \dfrac{1}{\exp(x)} = \exp(-x) & \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (\exp a)^n = \exp(na) \\ \exp a = \exp b \Leftrightarrow a = b & \exp a < \exp b \Leftrightarrow a < b \\ \exp a = 1 \Leftrightarrow x = 0 & \exp(1) = e \textit{ avec } e \simeq 2.718 \end{array}$$

Proposition 1.5 (lien entre exponentielle et logarithme)

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^\times \quad e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^\times \quad e^{\ln x} = x \quad \textit{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \ln e^x = x \end{array}$$

Puissances non entières d'un réel

Définition 1.3

Soit x un réel strictement positif et α un réel (positif ou négatif, entier ou non), on définit le réel x^α par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad x^\alpha \underset{\textit{par définition}}{=} e^{\alpha \ln x}$$

Remarque 1.2

Lorsque α est un entier (positif ou négatif), les proprités sur l'exponentielle et le logarithme nous montre que cette dernière définition coïncide avec la définition des puissances entières. Par contre, lorsque α n'est plus un entier, la définition de x^α par la formule $x^n = \underbrace{x \times x \times ... \times x}_{\alpha \text{ fois}}$ n'a plus de sens (essayer avec $\alpha = 2,005$, comment multiplier $2,005$ fois x par lui-même ?)
Cette nouvelle définition a l'avantage de définition des puissances non entières et a pour inconvénient d'être incapable de définition des puissances entières lorsque la base x est négative.

Les règles de calculs sont similaires à celles des fonctions puissances entières et nous les explicitons dans la proposition suivante

Proposition 1.6

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \textit{ et } \forall x, y \in \mathbb{R}_+^\times \quad \begin{array}{llll} x^\alpha \times y^\beta = a^{\alpha+\beta} & (x\times y)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha & (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\times\beta} & \sqrt{x} = x^{1/2} \\ x^0 = 1 & x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha} & \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} & \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \end{array}$$

1.2 Gestion des égalités

Pour commencer, ne jamais oublier que l'égalité $a = b$ est la même chose que l'égalité $b = a$. Cette remarquable, somme toute triviale au premier abord, fournit parfois des relations "oubliées". Par exemple, l'égalité $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ lorsqu'on la lit de gauche à droite est une égalité qui fournit une factorisation alors que lorsqu'on la lit de droite à gauche est une égalité de développement. N'oubliez pas cette petite remarque.

Proposition 1.7
On peut ajouter, retrancher, multiplier et diviser les égalités (tant que les opérations algébriques sont licites, c'est-à-dire tant que l'on ne divise pas par 0.

Proposition 1.8 (égalité de deux fractions)
Soient a, b, c, d quatres réels tels que b et d ne soient pas nuls. Alors on a

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Remarque 1.3
Cette proposition n'est rien d'autre que le célèbre produit en croix, fort utile dans la résolution d'équations.

Proposition 1.9 (égalités remarquables)
Pour tous réels a, b, c, d

$$\begin{aligned} a(b+c) &= ab + ac \qquad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ \text{Si } a &\geqslant 0, \quad x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a} \qquad \sqrt{x} = a \Rightarrow x = a^2 \end{aligned}$$

Proposition 1.10 (équation produit)
Soient $a_0, a_1, .., a_n$ des réels. Alors leur produit $a_0...a_n$ est nul si et seulement l'un de ces réels est nul, c'est-à-dire

$$a_0...a_n = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0 \quad ou \quad a_1 = 0.... \quad ou \quad a_n = 0$$

Remarque 1.4
Cette proposition permet alors de résoudre les équations du type $ac = bc$. En effet, on a

$$ac = bc \Leftrightarrow ac - bc = 0 \Leftrightarrow (a-b)c = 0 \Leftrightarrow (a - b = 0 \text{ ou } c = 0) \Leftrightarrow (a = b \text{ ou } c = 0).$$

Théorème 1.1 (Principe d'identification)
Soient $a_0, ..., a_n, b_0, .., b_m$ des réels tels que, pour tout réel x, sauf éventuellement un nombre fini, on ait

$$a_0 + a_1 x + .. + a_n x^n = b_0 + b_1 x + .. + b_m x^m$$

alors $n = m$ (peu intéressant) et $\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_n \\ \vdots \\ a_n = b_n \end{cases}$ *(fort intéressant dans la pratique)*

Ce principe est très utile pour la détermination de certaines constantes

Exemple 1.1
Déterminer tous les réels a, b, c tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax(x-1) + bx + c = x + 2$.
Réponse : on constate que notre égalité est une égalité entre deux polynômes valable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Nous allons donc identifier les coefficients de ces différents polynômes et pour cela, nous allons devoir développer nos expressions puis les regrouper par puissance

$$\begin{aligned} \forall x &\in \mathbb{R}, \quad ax(x-1) + b(x+1) + c = x + 2 \Leftrightarrow ax^2 - ax + bx + b + c = x + 2 \\ &\Leftrightarrow \quad ax^2 + (-a+b)x + (c+b) = 0 \times x^2 + 1 \times x + 2 \times 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -a + b = 1 \\ c + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Théorème 1.2 (Equation du second degré)
Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet dans les nombres réels

- *deux solutions* $x_+ = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *et* $x_- = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *si le discriminant* b^2-4ac *est strictement positif*
- *une solution* $x = \dfrac{-b}{a}$ *si le discriminant* b^2-4ac *est nul*
- *zéro solution si le discriminant* b^2-4ac *est strictement négatif.*

1.3 Gestion des inégalités

Contrairement aux égalités, un certain nombre d'opérations sont illicites.

Proposition 1.11 (règles de calculs sur les inégalités)
Soient a, b, c, d *des réels*

- *Si* $a \leqslant b$ *et si* $b \leqslant c$ *alors* $a \leqslant c$.
- *Si* $a \leqslant b$ *alors* $a+c \leqslant b+c$ *et* $a-c \leqslant b-c$
- *Si* $a \leqslant b$ *et* $c \geqslant 0$ *alors* $a \times c \leqslant b \times c$ *et si* $a \leqslant b$ *et* $c \leqslant 0$ *alors* $a \times c \geqslant b \times c$.
- *Si* a, b, c, d ***sont tous positifs*** *et* $a \leqslant b$ *et* $c \leqslant d$ *alors* $a \times c \leqslant b \times d$
  *(*on peut multiplier les inégalités en conservant le sens de l'inégalité lorsque tous les membres sont positifs*)*
- *Si* a, b, c, d ***sont tous positifs*** *alors* $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d \leqslant b \times c$

Proposition 1.12 (inéquations du "premier degré")
Soient a *et* b *deux réels tels que* $a \neq 0$. *Le réel* $ax+b$ *est du signe de* a *lorsque* $x \geqslant -\dfrac{b}{a}$ *et du signe de* $-a$ *lorsque* $x \leqslant -\dfrac{b}{a}$.

Proposition 1.13 (inégalités "du second degré")
Soient a, b, c *trois réels tels que* $a \neq 0$. *Le trinôme* ax^2+bx+c

- *est du signe de* a *si le discriminant* b^2-4ac *est négatif au sens large*
- *est du signe de* a *à l'extérieur des racines du trinôme et du signe de* $-a$ *à l'intérieur des racines du trinôme.*

Remarque 1.5
La combinaison des deux propositions précédentes permet de déterminer le signe de certaines expressions lorsqu'on a pu les factoriser sous la forme de facteurs du premier et second degré.

2 Notion de fonction numérique d'une variable réelle

2.1 Introduction

Définition 2.1 (fonction numérique d'une variable réelle)
On appelle fonction numérique d'une variable réelle la donnée d'un triplet $(I, J, x \mapsto f(x))$ *où*

- I *et* J *sont deux sous-ensembles de* $\mathbb{R}$
- $x \mapsto f(x)$ *(prononcer, "*x *donne* $f(x)$*") est un processus (un procédé) qui à tout élément* x *de l'ensemble* I *associe un et un seul réel* $f(x)$ *appartenant à* J.

Il existe plusieurs façons de noter une fonction $(I, J, x \mapsto f(x))$ *dont deux les principales sont les suivantes*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f} & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Lorsque les ensembles I *et* J *ont été définis ainsi que le processus* $x \mapsto f(x)$ *(et seulement lorsque toutes ces données ont été définies), on peut également utiliser la notation* f.

Définition 2.2

1. *L'ensemble I s'appelle l'ensemble de départ (ensemble des réels subissant le processus), l'ensemble J s'appelle l'ensemble d'arrivée (ensemble contenant les résultats du processus) et f le processus même. On dit également que la fonction f est définie sur I et qu'elle est à valeurs dans J.*

2. *Pour tout réel x appartenant à I, le réel $f(x)$ s'appelle l'image de x par la fonction f.*

3. *L'ensemble des réels x, n'appartenant pas nécessairement à I, pour lesquels le réel $f(x)$ existe s'appelle le domaine de définition de f et se note $\mathcal{D}_f$.*

4. *Un réel a est dit antécédent de b par f si et seulement si b est l'image de a par f. Autrement dit a est un antécédent de b par f si et seulement $f(a) = b$.*

5. *L'ensemble des points (du plan cartésien) de coordonnées $(x, f(x))$, où x est un élément de $\mathcal{D}_f$, est la courbe représentative de f.*

6. *Si f est une fonction de domaine $\mathcal{D}_f$ et si A désigne une partie de $\mathbb{R}$ contenue dans $\mathcal{D}_f$, on appelle restriction de f à A la fonction $f_{|A}$ dont le domaine de définition est A et qui est définie par*

$$\forall x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x).$$

7. *Soit K un sous-ensemble de I, on appelle image de K par f l'ensemble des images de tous les éléments de K par f. Cet ensemble est noté $f(K)$ et l'on a, par définition*

$$z \in f(K) \text{ si et seulement il existe un réel } x \in K \text{ tel que } z = f(x)$$

Remarque 2.1
Parfois, on pourra trouver abusivement la notation $x \mapsto f(x)$. Cette notation doit être utilisée avec modération et attention car elle est incomplète et elle peut rapidement prêter à confusion.
En effet, en utilisant cette notation, les fonctions $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ seront alors notées $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^2$, ce qui amène à penser que les fonctions f et g sont identiques, ce qui n'est pas du tout le cas. Certes, bien que le processus soit identique, les réels subissant ce processus ne sont pas les mêmes. C'est pour traiter ce cas que la notion de restriction a été définie : la fontion g est la restriction de la fonction f à l'ensemble $[0,1]$, autrement dit $g = f_{|[0,1]}$.
Ce qu'il faut retenir : *une fonction numérique n'est pas qu'un processus, autrement dit, ce n'est pas qu'une écriture du type $x \mapsto x^2$ ou $f(x) = x^2$, c'est également la donnée de l'ensemble de départ (ensemble des réels subissant le processus) et de l'ensemble d'arrivée (nature du résultat).*

Définition 2.3 (opérations sur les fonctions)

1. *Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble I, on appelle*

   - *somme de f et g, la fonction notée $f + g$ définie sur I par*

   $$\forall x \in I, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

   - *produit de f et g, la fonction notée $f.g$ définie sur I par*

   $$\forall x \in I, \quad (f.g)(x) = f(x) \times g(x)$$

   - *produit du réel λ par la fonction f, la fonction notée $\lambda.f$ définie sur I par*

   $$\forall x \in I, \quad (\lambda.f)(x) = \lambda \times f(x)$$

2. *Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble I telles que $\forall x \in I, \quad g(x) \neq 0$ (la fonction g ne s'annule pas sur I), on appelle quotient de f par g la fonction notée $\dfrac{f}{g}$ définie par*

$$\forall x \in I, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

3. *Soient f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur $f(I)$, on appelle composée de f par g la fonction notée $f \circ g$ définie par*

$$\forall x \in I, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

2.2 Eléments remarquables d'une fonction.

Définition 2.4
Soit f une fonction définie sur I.

1. *On dit qu'un nombre réel M (resp. m) majore (resp. minore) la fonction f sur I lorsque*

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant M \quad (\text{resp. } \forall x \in I, \quad f(x) \geqslant m).$$

   Dans ce cas on dit que M (resp. m) est un majorant (minorant) de f sur I.

2. *On dit que f est bornée sur I si elle est à la fois majorée et minorée sur I.*

3. *Soit x_0 un élément de I. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) en x_0 si*

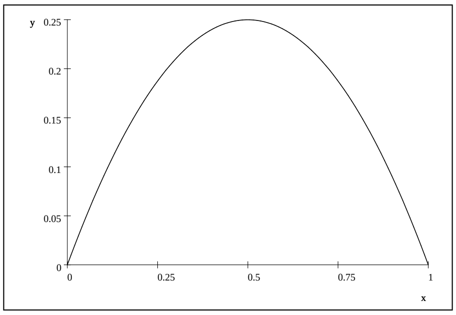
$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{resp. } \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) \geqslant f(x_0)).$$

   Autrement dit, la fonction f admet un maximum (resp. minimum) en x_0 si $f(x_0)$ est un majorant (resp. minorant) de la fonction f. On dit alors que $f(x_0)$ est le maximum (resp. minimum) de f sur I et l'on note $\max\limits_I f(x) = f(x_0)$ (resp. $\min\limits_I f(x) = f(x_0)$).
   Un extremum de f sur I est soit un minimum soit un maximum.

Remarque 2.2
Lorsque le minimum (resp. maximum) de f existe, il est unique (la valeur $f(x_0)$ est unique). Par contre, le point où se réalise ce minimum (resp. maximum) n'est pas nécessairement unique.
L'existence de minorants, majorants, maximum ou minimum d'une fonction sur un ensemble n'est pas garantie en général.

Exemple 2.1
La fonction définie sur $[0,1[$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x - x^2$ est

- bornée sur $[0,1]$,
- son maximum vaut $\dfrac{1}{4}$ et il est atteint en $x = \dfrac{1}{2}$ donc $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = \dfrac{1}{4}$
- son minimum vaut 0 et il est atteint en $x = 0$ et $x = 1$ donc $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 0$



Exemple 2.2
La fonction $x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ n'admet aucun minorant, ni majorant sur $\mathbb{R}$ donc aucun minimum ou maximum.

Exemple 2.3
La fonction $x \mapsto x$ définie sur $]0,1]$ admet 0 comme minorant, 1 comme majorant, 1 comme maximum mais elle n'admet aucun minimum (si ce minimum existe, c'est nécessairement 0 qui n'est pas atteint sur $]0,1]$).

Définition 2.5
Si f est une fonction majorée (resp. minorée) sur I, on appelle borne supérieure (resp. inférieure) le plus petit des majorants de f (resp. le plus grand des minorant de f) sur I. On a la note $\sup\limits_I f$ (resp. $\inf\limits_I f$).

Remarque 2.3
Dans le dernier exemple, $\sup\limits_{]0,1]} f = 1$ et $\inf\limits_{]0,1]} f = 0$. On constate ici que le sup de la fonction est tout simplement le maximum de f. C'est un fait général : si une fonction possède un maximum (resp. minimum) sur un intervalle I, alors le $\sup\limits_I f$ (resp. $\inf\limits_I f$) est égal au $\max\limits_I f$ (resp. $\min\limits_I f$). Par contre, le $\sup\limits_I f$ (resp. $\inf\limits_I f$) peut exister sans que le maximum (resp. le minimum) existe.

2.3 Fonctions remarquables.

Définition 2.6 (parité)
On dit que f est paire (resp. impaire) si et seulement

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad -x \in \mathcal{D}_f \quad \textit{(le domaine de définition est symétrique par rapport à } 0 \\ \textit{et } \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = f(x) \ \textit{(resp.} f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

Remarque 2.4
Cette définition "algébrique" de la parité est équivalente à la définition géométrique suivante
La fonction f est paire (resp. impaire) si et seulement sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (resp.symétrique par rapport à l'origine O du repère).
Dans la pratique, on utilise toujours la définition "algébrique" pour justifier la parité ou la non parité d'une fonction (le problème résultant du peu de confiance que l'on peut accorder à une représentation graphique).

Exemple 2.4

1. Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est une fonction paire car
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ donc son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 (si $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$)
   - et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1} = f(x)$
2. Par contre la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ n'est pas une fonction paire ou impaire car son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ n'est pas symétrique par rapport à 0 ($-2 \in \mathcal{D}_f$ mais $2 \notin \mathcal{D}_f$).

Définition 2.7 (Monotonie)
Soit I un intervalle sur lequel f est définie; on dit que

1. *f est croissante (resp. décroissante) sur I lorsque*

$$\forall x, y \in I, \begin{cases} x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y) \\ \textit{(resp. } x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y). \end{cases}$$

2. *f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I lorsque*

$$\forall x, y \in I, \begin{cases} x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \\ \textit{(resp. } x < y \Rightarrow f(x) > f(y). \end{cases}$$

3. *On dit qu'une fonction est monotone (resp. strictement monotone) sur un intervalle si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur cet intervalle.*

Proposition 2.1
1. *La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).*
2. *Si f est croissante (resp. décroissante) sur I et g est croissante (resp. décroissante) sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est croissante sur I.Si La composée de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante.*
3. *Si f est croissante sur I et g est décroissante sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est décroissante sur I. De même, si f est décroissante sur I et g est croissante sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est décroissante sur I*

Exemple 2.5
La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+$. En effet, si l'on considère les fonctions f et g définies par

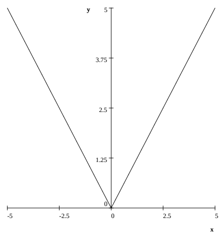
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

on a $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) = g(f(x))$, c'est-à-dire que $h = g \circ f$, autrement dit la fonction h est la composée de la fonction g par la fonction f.
La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (comme somme de deux fonctions croissantes), l'image de $\mathbb{R}_+$ par est $f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$ et la fonction g est décroissante sur $[1, +\infty[$ donc la fonction $g \circ f = h$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3 Fonctions de références

Fonction valeur absolue

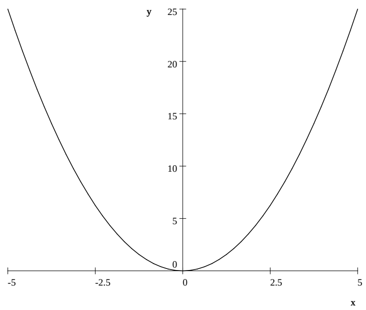
La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ a pour domaine de définition $\mathbb{R}$, c'est une fonction paire, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. et la représentation graphique est donnée par



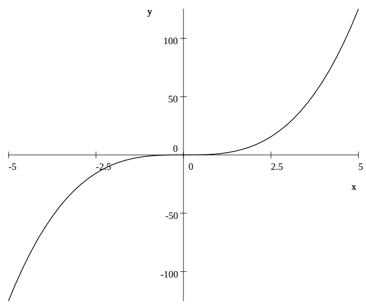
$x \mapsto |x|$

Fonction puissance entière $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$)

La fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ si n est un entier positif et est paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair) dont la représentation graphique est donnée par

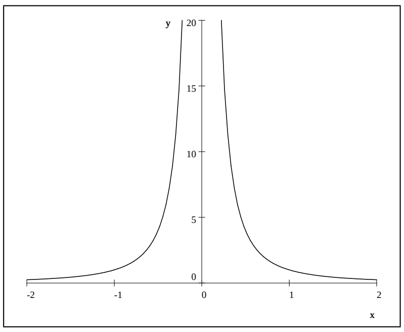


$x \mapsto x^n$ si n est pair

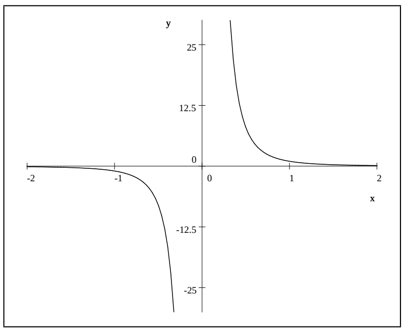


$x \mapsto x^n$ si n est impair

La fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^\times$ si n est un entier négatif et est paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair) dont la représentation graphique est



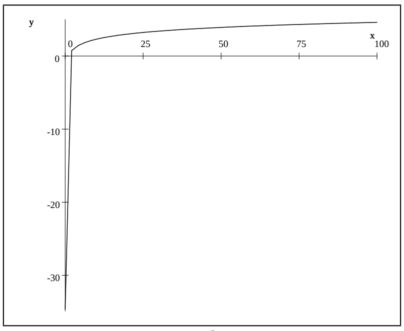
$x \mapsto x^n$ si n est pair



$x \mapsto x^n$ si n est impair

Fonction logarithme népérien

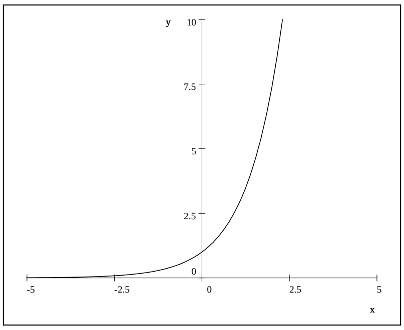
La fonction ln est définie sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^\times$ et sa représentation graphique est



$x \mapsto \ln x$

Fonction exponentielle

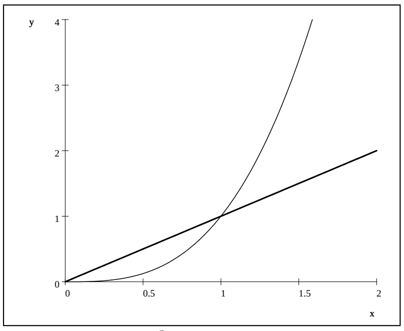
La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et la représentation graphique de la fonction exponentielle est



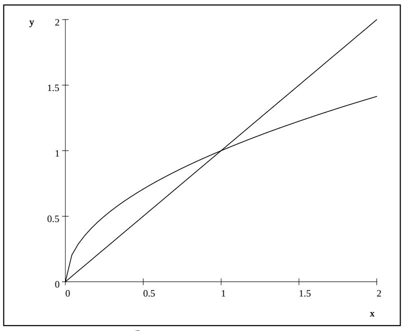
$x \mapsto e^x$

Fonctions puissance non entière $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$)

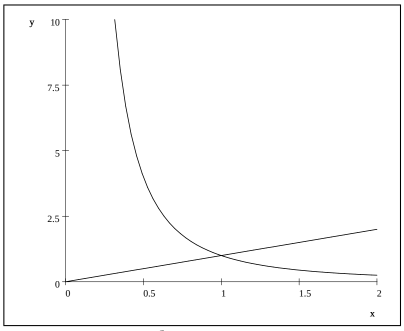
La représentation graphique des différentes fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ est donnée par les graphiques suivants



$y = x^\alpha$ lorsque $\alpha > 1$



$y = x^\alpha$ lorsque $0 < \alpha < 1$



$y = x^\alpha$ lorsque $\alpha < 0$

Fonctions polynômes

Définition 3.1

1. *On appelle fonction monôme (ou simplement monôme) toute fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et de la forme*
$$x \mapsto a_k x^k \text{ où } a_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.\ a_k \text{ est le coefficient du monôme}$$
2. *On appelle fonction monôme (ou simplement monôme) toute fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et de la forme*
$$x \mapsto P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
où $a_k \in \mathbb{R}$ $\forall k \in \{0, .., n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
Les nombres a_k sont les coefficients du polynôme. Si $a_n \neq 0$, on dit que le polynôme P est de degré n et on note $\deg P = n$. Dans ce cas, a_n est son coefficient dominant.
Si tous les coefficients sont nuls, on dit que P est le polynôme nul. Le polynôme nul ne possède pas de degré.

3. *On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.*

Exemple 3.1

1. $x \mapsto x^{2002}$ est un monôme de degré 2002 et 1 est son coefficient.
2. Le polynôme $x \mapsto 7x^3 - 3x^2 + 10$ est de degré 3 et son coefficient dominant est 7.
3. Si $ax^2 + bx + c = 3x + 2 = 0x^2 + 3x + 2$ alors $a = 0$, $b = 3$ et $c = 2$

4 Limites d'une fonction numérique d'une variable réelle

Dans cette section, I désignera un intervalle I de la forme $]a; b[$, x_0 un élément de I et f une fonction définie sur I sauf, peut-être, en x_0.

4.1 Définitions

Rappelons pour commencer que la distance entre deux réels a et b est donné par $|a - b|$

Définition 4.1 (Limite finie en un point fini)
Soient x_0 un élément de l'intervalle I et L un nombre réel.

On dit que f tend vers L lorsque x tend vers x_0 si et seulement, lorsque le réel $f(x)$ se rapproche autant que l'on souhaite vers L du moment que le réel x est suffisamment près de x_0, sans pourtant lui être égal.

Autrement dit, si l'on se donne à l'avance un terme d'erreur ε positif non nul fixé, lorsque x est à une distance suffisamment petite de x_0 et $x \neq x_0$, le réel $f(x)$ est alors nécessairement à une distance inférieure à ε de L

On peut traduire mathématiquement la définition de la limite de la façon suivante :

$$\boxed{\textit{Pour tout réel } \varepsilon > 0, \textit{ il existe un réel } \alpha \textit{ tel que (si } x \textit{ appartient à } I \textit{ et si } |x - x_0| < \alpha) \textit{ alors } |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Le nombre L s'appelle la limite de f en x_0. On note alors $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{x_0} f = L$ voire $f(x) \underset{x \to x_0}{\to} L$.

Exemple 4.1

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 1$ et $x_0 = 1$. Alors quand x se rapproche de 1, $f(x)$ se rapproche de $f(1) = 3$. Nous allons le prouver avec la définition. Pour cela nous allons évaluer l'expression $|f(x) - 3|$ (la distance entre $f(x)$ et 3)
$$|f(x) - 3| = |4x - 1 - 3| = |4x - 4| = 4|x - 1|$$
Ainsi, si l'on se donne un terme d'erreur $\varepsilon > 0$, lorsque la distance entre x et 1 (c'est-à-dire $|x - 1|$) est plus petite que le quart de ε (i.e. $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{4}$) alors la distance entre $f(x)$ et 3 est inférieure nécessairement à $4 \times \dfrac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$.
Par définition de la notion de limite, on est en droit d'affirmer que $f(x) \underset{x \to 1}{\to} 3$
2. Par contre, il ne faut penser qu'en général que l'on peut écrire impunément $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Un exemple simple nous est fourni par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$
Pour commencer, lorsque x est suffisamment proche de 0 sans être égal à 0, le réel $f(x) = x$ est aussi suffisamment proche de 0 (sic). Par conséquent, le réel $f(x)$ tend vers 0 donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$.

Définition 4.2 (Limite infinie en un point fini)
Soient x_0 un élément de l'intervalle I.

On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0 si et seulement, lorsque le réel $f(x)$ devient aussi grand que l'on souhaite du moment que le réel x est suffisamment près de x_0, sans pourtant lui être égal.

Autrement dit, si l'on se donne à l'avance un nombre arbitraire A positif non nul fixé (aussi grand que l'on *souhaite), lorsque x est à une distance suffisamment petite de x_0 et $x \neq x_0$, le réel $f(x)$ est alors plus grand que A*

On peut traduire mathématiquement la définition de la limite de la façon suivante :

Pour tout réel $A > 0$, il existe un réel α tel que (si x appartient à I et si $|x - x_0| < \alpha$) alors $f(x) \geqslant A$.

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ voire $f(x) \underset{x\to x_0}{\rightarrow} +\infty$.
On dit que f possède $-\infty$ pour limite en x_0 si et seulement si $-f$ possède $+\infty$ comme limite en x_0.
On note alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ ou encore $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$ voire $f(x) \underset{x\to x_0}{\rightarrow} -\infty$.

Remarque 4.1
Je ne donne pas la définition des limites d'une fonction en $+\infty$ (ou $-\infty$). Le lecteur peut reconstruire seul ces définitions en retraduisant mathématiquement la situation intuitive qu'il a de la limite (il distinguera le cas où la limite est finie et le cas où la limite est infinie).
La notion de limite gauche (resp. droite) en un point est de même nature en tenant compte que x se rapproche à gauche (resp. à droite) de x_0, c'est-à-dire avec la contrainte supplémentaire que $x < x_0$ (resp. $x > x_0$).
On dit aussi par limite inférieure (car x est inférieure à x_0) et limite supérieure (car x est supérieure à x_0)

Proposition 4.1
La fonction f admet une limite L en x_0 si et seulement elle admet une limite gauche et une limite droite et ces deux limites sont égales à L.

Cette proposition est bien utile lorsque qu'on a affaire à des fonctions définies par différentes expressions selon les valeurs de x et pour lesquelles le réel x_0 se trouve à la frontière commune de deux expressions.

Exemple 4.2

1. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$ admet-elle une limite en 2 ? Si oui, calculer la.
   Réponse : On ne peut directement étudier l'existence de la limite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ étant donné que l'on ne peut mécaniquement remplacer $f(x)$ par 0 ou par 1. Par contre, selon que l'on soit à gauche ou à droite de 1, la fonction f est parfaitement explicitée par une expression "simple". Il est immédiat de constater que
   $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 1 = 1$$
   donc les limites gauche et droite sont distinctes, ce qui implique que la fonction f n'admet pas de limite en 2.
2. Même question avec la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x+1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$
   Réponse : Comme précédemment, on va utiliser les limites gauche et droite. Pour la limite gauche, lorsque x est suffisamment proche de 2, on est certain que x sera compris entre 0 et 2, ce qui nous autorisera à remplacer $f(x)$ par $x+1$ lorsque x sera suffisamment proche de 2 tout en lui étant inférieur.
   $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x+1 = 2+1 = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$$
   Par conséquent, les limites gauche et droite en 2 sont identiques donc la fonction f admet une limite en 2 qui est égale à 3, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.

4.2 Opérations sur les limites

Proposition 4.2 (passage à la limite dans les inégalités)
Soient f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0 et possédant une limite en x_0.
Si $f(x) \geqslant g(x)$ $\forall x \in I\backslash\{x_0\}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. En particulier, si $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in I\backslash\{x_0\}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant 0$.

Théorème 4.1 (d'encadrement)
Soient f, g, h trois fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0.Supposons que l'on dispose de l'encadrement suivant
$$\forall x \in I\backslash\{x_0\}, \quad f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$$
et que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$.
Alors h possède une limite en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$

Corollaire 4.1
Soit f une fonction bornée sur $I\backslash\{x_0\}$ et g une fonction telle que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$

Proposition 4.3 (existence de limite pour les fonctions monotones)
Toute fonction monotone sur un intervalle $]a,b[$ admet une limite droite en a et gauche en b (finie ou infinie selon les cas)

Nous allons maintenant énoncer les règles de calculs sur les limites par des tableaux (ces règles seront également valables pour les limites en x_0 ou à gauche ou à droite en x_0 mais elles ne seront pas explicitées pour ne pas alourdir le texte) .
La notation **F.I.** signifie "forme indéterminée" ce qui signifie qu'aucun théorème ne nous permet de conclure en général, ce qui ne signifie pas qu'il est impossible de calculer la limite. Nous verrons par la suite des méthodes pour lever cette indétermination.

Addition

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$	$-\infty$	L	$+\infty$	$\longleftarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.	
L'	$-\infty$	$L+L'$	$+\infty$	
$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	
$\uparrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$				

Mulplication par un nombre
Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ et si λ est un nombre alors $\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda.f(x))=\lambda\times L$.

Produit

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\times g(x))$	$-\infty$	$L<0$	0	$L>0$	$+\infty$	$\longleftarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$.	
$L'<0$	$+\infty$	$L\times L'$	0	$L\times L'$	$-\infty$	
0	F.I.	0	0	0	F.I.	
$L'>0$	$-\infty$	$L\times L'$	0	$L\times L'$	$+\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	
$\uparrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$						

Inverse

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$-\infty$	$l\neq 0$	$l=0$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$	0	$\dfrac{1}{l}$	F.I.	0

Quotient
Nous n'avons pas besoin d'en établir le tableau. En effet, il suffit de se rappeler qu'un quotient est une multiplication par l'inverse $\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}$, ce qui permet de conclure en utilisant conjointement le tableau de l'inverse du produit.

Proposition 4.4 (changement de variable)
Si $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=u_0$ et si $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=L$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x))=L$.

4.3 Limites classiques et applications

En $+\infty$ (et $-\infty$ lorsque cela a un sens) pour les produits et les quotients uniquement,

- Toute fonction exponentielle $x\mapsto e^{\alpha x}$ (*α étant une constante*) tend plus vite vers sa limite que toute fonction puissance $x\mapsto x^{\beta}$ (*β étant une constante*) et que toute fonction puissance du logarithme $x\mapsto(\ln x)^{\delta}$ (*δ étant une constante*) donc

En $+\infty$, pour un produit ou un quotient, toute fonction exponentielle impose sa limite (au signe près) sur toute fonction puissance et sur toute fonction puissance de $\ln x$

- Les fonctions puissances $x \mapsto x^\beta$ (β *étant une constante*) tendent plus vite vers leurs limites respectives que les fonctions puissances du logarithme $x \mapsto (\ln x)^\delta$ (δ *étant une constante*) donc les fonctions puissances imposent leurs limites respectives sur les fonctions les fonctions puissances de $\ln x$

En $+\infty$, pour un produit ou un quotient, toute fonction puissance impose sa limite (au signe près) sur toute fonction puissance de $\ln x$

En 0^+, pour les produits et les quotients uniquement

- les fonctions puissances $x \mapsto x^\beta$ (β *étant une constante*) tendent plus vite vers leurs limites respectives que les fonctions puissances du logarithme $x \mapsto (\ln x)^\delta$ (δ *étant une constante entière*) donc les fonctions puissances imposent leurs limites respectives sur les fonctions les fonctions puissances de $\ln x$

En 0^+, pour un produit ou un quotient, toute fonction puissance impose sa limite (au signe près) sur toute fonction puissance de $\ln x$

On résume ceci dans la proposition suivante

Proposition 4.5 (limites à connaître par coeur)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} x^\beta e^{\alpha x} &= \boxed{\pm} \lim_{x\to\pm\infty} e^{\alpha x} \quad \textit{(le signe } \boxed{\pm} \textit{ étant du signe de } x^\beta e^{\alpha x} \textit{ au voisinage de } \pm\infty\textit{)} \\
\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^\delta x^\beta &= \lim_{x\to\pm\infty} e^{\alpha x} \\
\lim_{x\to 0^+} (\ln x)^\delta x^\beta &= \boxed{\pm} \lim_{x\to\pm\infty} x^\beta \quad \textit{(le signe } \boxed{\pm} \textit{ étant du signe de } (\ln x)^\delta x^\beta \textit{ au voisinage de } 0\textit{)}
\end{aligned}$$

4.4 Vitesses de convergence et méthodes pour lever une ou des indéterminations

En $+\infty$ (et $-\infty$ lorsque cela a un sens),

- lorsque le réel α est positif, plus l'exposant α est positif, plus les fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}$, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto (\ln x)^\alpha$ tendent rapidement vers $+\infty$
- lorsque le réel α est négatif, plus l'exposant α est négatif, plus les fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}$, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto (\ln x)^\alpha$ tendent rapidement vers 0

En 0^+,

- lorsque le réel α est positif, plus l'exposant α est positif, plus les fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto (\ln x)^\alpha$ tendent rapidement vers 0
- lorsque le réel α est négatif, plus l'exposant α est négatif, plus les fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto (\ln x)^\alpha$ tendent rapidement vers $+\infty$

Exemple 4.3
En $+\infty$, la fonction $x \mapsto x^{10}$ tend plus rapidement vers $+\infty$ que la fonction $x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$.
En 0, la fonction $x \mapsto x^{10}$ tend plus rapidement vers 0 que la fonction $x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$

Formes indéterminées du type $+\infty - (+\infty)$

Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme a qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$. On aboutit à un produit de la forme $a \times b$, et, si l'on a bien fait son boulot et si l'on a un peu de chance, le facteur b admet une limite finie non nulle, ce qui permet de conclure.

Formes indéterminées du type $\dfrac{\infty}{\infty}$ lorsque le numérateur et/ou le dénominateur sont des sommes

Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme a qui croit le plus vite, ,en valeur absolue vers $+\infty$ au numérateur ainsi que le terme c qui croit le plus vite, en valeur absolue, au dénominateur vers $+\infty$. En utilisant la formule calculatoire $\dfrac{a \times b}{c \times d} = \dfrac{a}{c} \times \dfrac{b}{d}$, on simplifie au mieux le quotient $\dfrac{a}{c}$. En général, la limite du quotient simplifié $\dfrac{a}{c}$ se détermine simplement et le quotient $\dfrac{b}{d}$ admet toujours une limite finie non nulle si l'on a bien fait son boulot et si l'on a un peu de chance.

Formes indéterminées du type $\dfrac{0}{0}$ lorsque le numérateur et/ou le dénominateur sont des sommes

Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme a qui tend le moins vite, ,en valeur absolue, vers 0 au numérateur ainsi que le terme c qui croit le moins vite, en valeur absolue, vers 0 au dénominateur. En utilisant la formule calculatoire $\dfrac{a\times b}{c\times d} = \dfrac{a}{c}\times\dfrac{b}{d}$, on simplifie au mieux le quotient $\dfrac{a}{c}$. En général, la limite du quotient simplifié $\dfrac{a}{c}$ se détermine simplement et le quotient $\dfrac{b}{d}$ admet toujours une limite finie non nulle si l'on a bien fait son boulot et si l'on a un peu de chance.

Remarque 4.2
Les différentes indéterminations précédentes découle d'un seul et même point de vue que nous allons exposer ci-dessous.
Pour lever des indéterminations provenant d'une addition, l'idée fondamentale est de repérer dans chaque terme, l'élément le plus grand en $+\infty$ et de le factoriser.
Que signifie l'expression "le terme le plus grand" dans la somme $A+B$? Etant donné que l'on recherche des limites, on ne saurait s'arrêter sur la notion statique de plus grand élément ($A\leqslant B$ ou $B\leqslant A$) mais on recherche l'élément qui à terme prend le dessus sur les autres au voisinage de l'infini, c'est-à-dire celui qui va donner l'ordre de grandeur de la somme $A+B$.
Prenons par exemple, "1 milliard" d'euros et "1 milliard et 13" euros. Ces deux quantités sont du même ordre de grandeur, celui du milliard d'euros. Ainsi, si l'on considère x et $x+13$, les deux expressions sont du même ordre de grandeur lorsque x devient infiniment grand même si x est toujours inférieur à $x+13$.
A quoi correspond l'ordre de grandeur ? Si l'on revient à l'exemple du "milliard et 13" euros, on constate que le quotient entre 13 et le milliard est un nombre très petit, ce qui nous incite à considérer comme négligeable les 13 euros face au milliard d'euros. Etant donné que l'on travaille sur des fonctions en les testant à l'infini, une quantité B sera négligeable devant une quantité A si le quotient $\dfrac{B}{A}$ devient infiniment petit, c'est-à-dire s'il tend vers 0.
Ainsi, dans une somme $A+B$, si $\dfrac{B}{A}$ tend vers 0, on dira que B est négligeable devant A et A domine B. On factorisera alors par A dans la somme $A+B$, ce qui nous amène à une expression du type $A\left(1+\dfrac{B}{A}\right)$.
Puisque le quotient $\dfrac{B}{A}$ tend vers 0, la parenthèse tend vers 1 et on peut appliquer les théorèmes sur le produit de limites pour calculer la limite de la somme $A+B = A\left(1+\dfrac{B}{A}\right)$.
Pour les quotients, on applique ces raisonnements aux numérateurs et dénominateurs afin d'extirper les "a et c", les "b et d" étant simplement les parenthèses "$\left(1+\dfrac{B}{A}\right)$" correspondants aux calculs issus des sommes précédentes.

4.5 Asymptotes

Définition 4.3
Soit f une fonction définie sur I.

1. *Soit x_0 un nombre réel (donc différent de $\pm\infty$).*
   Si $f(x) \underset{x\to x0}{\rightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$) , on dit que la droite $x=x_0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$
2. *Si $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \infty$ alors on dit que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet une branche parabolique.*
3. *S'il existe un réel a (donc différent de $\pm\infty$) vérifiant $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ et $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$, on dit que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet une branche oblique de direction la droite d'équation $y=ax$*
4. *S'il existe deux réels a et b tels que $\displaystyle\lim_{x\to+\pm\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$, on dit que la droite $y=ax+b$ est asymptote en $\pm\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.*

Comment déterminer l'existence d'une asymptote en $\pm\infty$ à la courbe représentative d'une fonction ?

1. On déterminer pour commencer $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Si la limite est finie et vaut b, alors la droite d'équation $y=b$ est asymptote en $\pm\infty$ à $\mathcal{C}_f$.

2. Si la limite $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ est infinie, on calcule la limite $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si la limite est infinie, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique en $\pm\infty$.

3. Si la limite $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ est finie et vaut a, on calcule la limite $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$. Si la limite est infinie, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche oblique de direction la droite d'équation $y = ax$.

4. Si la limite $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$ est finie et vaut b, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une droite-asymptote en $\pm\infty$ d'équation $y = ax + b$.

5 Continuité

I désigne un intervalle, x_0 un élément de I et f une fonction d'une variable réelle définie sur I.

Nous avons vu précédemment qu'en général, on ne pouvait affirmer que la limite de f en x_0 existe et, lorsque cela est le cas, on n'a pas nécessairement l'égalité $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (que tous les étudiants adorent).
En fait, les fonctions pour lesquelles cette limite existe en x_0 et qui vaut justement $f(x_0)$ porteront désormais le nom de fonctions continues en x_0. Par conséquent, la plupart des étudiants faisaient de la continuité sans le savoir, comme un certain Monsieur ......
Le lecteur est d'emblée convaincu que la notion de continuité est extrément importante pour lui et pour l'Analyse :-) Il a raison sur les deux plans.

Définition 5.1 (Continuité d'une fonction numérique d'une variable réelle)

1. *On dit que f est continue en x_0 ssi $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*

2. *On dit que f est continue à gauche (resp. à droite) en x_0 ssi $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$)*

3. *On dit que f est continue sur I ssi elle est continue en tout point x_0 de I*

4. *.On dit que f est continue sur l'intervalle fermé $[a;b]$ ssi elle est continue sur $]a;b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.*

Théorème 5.1 (table de références)

1. *Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$*

2. *La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}^+_\times$*

3. *Les fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}$ (α étant une constante réelle) sont continues sur $\mathbb{R}$*

4. *Toute fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ si $\alpha \geqslant 0$ (resp. sur $\mathbb{R}^+_\times$ si $\alpha < 0$)*

Remarque 5.1
C'est pour cette raison que l'on a $\lim_{x\to 3} \ln x = \ln 3$ (cf. la définition de la continuité en 3 !)

En utilisant les théorèmes sur les opérations algébriques des limites, la définition de la continuité nous fournit de façon évidente les deux propositions suivantes

Proposition 5.1 (règles de calcul algébrique)
Soient f, g deux fonctions continues en x_0 (resp. sur I) et λ un nombre réel. Alors

1. *$f + g, \lambda f$ et $f \times g$ sont continues en x_0 (resp. sur I)*

2. *Si en outre f ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0 (resp. sur I)*

Exemple 5.1

1. Quel est l'intervalle de continuité de la fonction $x \mapsto x\ln x$?
   Pour commencer, on sait que $\begin{cases} x \mapsto x \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \text{ est continue sur } \mathbb{R}^\times_+ \end{cases}$. Par conséquent, ces deux fonctions sont simultanément continues sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^\times_+ = \boxed{\mathbb{R}^\times_+}$ (l'intervalle commun I de la proposition) donc la fonction $x \mapsto x\ln x$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R}^\times_+}$ (l'intervalle commun)

2. Montrons que la fonction $x \overset{f}{\mapsto} \dfrac{x+1}{3x-1}$ est continue sur $[1,5]$.
   Pour commencer, on sait que $\left\{\begin{array}{l} x \mapsto x+1 \text{ est continue sur } [1,5] \\ x \mapsto 3x-1 \text{ est continue sur } [1,5] \end{array}\right.$. En outre, $\forall x \in [1,5], \quad 3x-1 \neq 0$ donc le quotient $x \mapsto \dfrac{x+1}{3x-1}$ est continue sur $[1,5]$

Proposition 5.2 (composition des fonctions continues)
Soient u une fonction continue en x_0 (resp. sur I) et f une fonction continue en $u(x_0)$ (resp. $u(I)$) alors $x \mapsto f(u(x))$ est continue en x_0 (resp. sur I).

En choisissant respectivement les fonctions exponentielles, puissances entières (positives puis négatives puis non entières) et logarithme, on en déduit un corollaire fort utile dans la pratique.

Corollaire 5.1
Soit u une fonction continue sur I.

- *La fonction $\exp u$ est continue sur I.*
- *Si n est un entier positif alors u^n est continue sur I*
- *Si u est strictement positive sur I alors la fonction $\ln u$ est continue sur I.*
- *Si α est un réel strictement négatif et non entier et si u est strictement positive sur I alors la fonction u^α est continue sur I.*
- *Si α est un réel positif et si u est positive sur I, alors la fonction u^α est continue sur I.*

Exemple 5.2
Quel est l'intervalle de continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{3x+1}$
0n considère la fonction $u : x \mapsto 3x+1$ et comme fonction f la fonction $f : x \mapsto x^{1/2}$ qui est un réel positif non entier.
La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$, positive sur $\left[-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ donc la fonction $x \mapsto f(u(x)) = \sqrt{3x+1}$ est continue sur $\left[-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$

Proposition 5.3 (Prolongement continu d'une fonction)
Soit f une fonction définie sur $I\backslash\{x_0\}$ et non définie en x_0. Supposons en outre que f soit continue sur $I\backslash\{x_0\}$ et que la limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ existe et soit finie. Alors la fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \left\{\begin{array}{c} f(x) \text{ si } x \in I\backslash\{x_0\} \\ L \text{ si } x = x_0 \end{array}\right.$$

est continue sur I. Elle s'appelle le prolongement par continuïté de f en x_0.

Je laisse le soin au lecteur de se représenter une telle fonction f et de comprendre graphiquement ce que représente $\widetilde{f}$. Il en déduira l'origine de l'expression "prolongement continu".

6 Dérivabilité

Soit f une fonction définie sur I et x_0 un point de I.

Définition 6.1 (dérivabilité d'une fonction)

1. *On appelle taux d'accroissement de f en x_0 la fonction définie sur $I\backslash\{x_0\}$ par $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.*
   Cette fonction représente la pente de la droite reliant les points d'abscisse x et x_0 sur la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.
2. *On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite finie en x_0.*
   Autrement dit, la fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si la limite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est

finie.
Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0 et se note $f'(x_0)$, c'est-à-dire

$$f'(x_0) \underset{\text{par définition}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3. *On dit que f est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, sa fonction dérivée est par définition l'application $x \mapsto f'(x)$, que l'on note aussi f'.*

Théorème 6.1 (table de référence)
Les fonctions suivantes f sont dérivables sur $\mathcal{D}_{f'}$ et leurs dérivées respectives sont données par

$\mathcal{D}_f$	f	$\mathcal{D}_{f'}$	f'
$\mathbb{R}$	x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}_+^\times$	x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^\times$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}_+^\times$	$\ln x$	$\mathbb{R}_+^\times$	$\frac{1}{x}$

Proposition 6.1 (règles de calculs algébriques)
Soient f, g deux fonctions dérivables en x_0 (resp. sur I) et λ un nombre réel. Alors

1. *les fonctions $f+g, \lambda f$ et $f \times g$ sont dérivables en x_0 (resp. sur I) et leurs dérivées respectives sont données par*
$$(f+g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f', \quad (f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$
2. *Si en outre g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 (resp. sur I) et sa dérivée est donnée par*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

Proposition 6.2 (composition des fonctions dérivables)
Soient u une fonction dérivable en x_0 (resp. sur I) et f une fonction dérivable en $u(x_0)$ (resp. $u(I)$) alors $x \mapsto f(u(x))$ est dérivable en x_0 (resp. sur I) et sa dérivée est donné par

$$(f(u(x))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

Nous allons donner quelques applications courantes et bien utiles de ce théorème

Corollaire 6.1
Soit u une fonction dérivable sur I.

- *Si u est dérivable sur I alors la fonction $\exp u$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut $(\exp u)' = u' \times (\exp u)$*
- *Si n est un entier positif et si u est dérivable sur I et alors u^n est dérivable sur I est dérivée vaut $(u^n)' = u' \times (n \times u^{n-1})$*
- *Si u est strictement positive sur I alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.*
- *Si α est un réel strictement inférieur à 1 (non entier) et si u est strictement positive sur I alors la fonction u^α est dérivable sur I et sa dérivée vaut $(u^\alpha)' = u' \times (\alpha \times u^{\alpha-1})$*
- *Si α est un réel supérieur ou égal à 1 et si u est positive sur I, alors la fonction u^α est dérivable sur I et sa dérivée vaut $(u^\alpha)' = u' \times (\alpha \times u^{\alpha-1})$*

Pour la preuve, je laisse le lecteur trouver la bonne fonction f (ce n'est pas dur !!) et vérifier que les conditions demandées par la proposition de composition n'est ni plus, ni moins que les conditions demandées par le corollaire.

Exemple 6.1
Quel est l'intervalle de dérivabilité de la fonction $x \mapsto \sqrt{3x+1}$ et calculer sa dérivée lorsque cela est possible.
0n considère la fonction $u : x \mapsto 3x+1$ et comme fonction f la fonction $f : x \mapsto x^{1/2}$ qui est un réel positif non entier strictement inférieur à 1.
La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$, strictement positive sur $\left]-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ donc la fonction $x \mapsto f(u(x)) = \sqrt{3x+1}$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[, \quad (\sqrt{3x+1})' = (u^{1/2}(x))' = u'(x) \times \frac{1}{2} \times (u(x))^{1/2-1} = 3 \times \frac{1}{2} \times (3x+1)^{-1/2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$$

Corollaire 6.2 (limites classiques)
On dispose des limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Ce corollaire découle directement du fait que les fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sont dérivables en 0. Le lecteur écrit alors les taux d'accroissement correspondants et la dérivée de ces fonctions en 0 étant connue, il en déduit les limites données ci-dessus.
Les deux propositions suivantes nous fournissent les règles de calculs sur les fonctions dérivables.

Proposition 6.3 (la dérivabilité entraine la continuité)
Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0

Par contre, si f est continue en x_0 cela n'implique pas que f est dérivable en x_0 (nous le verrons en TD)

Proposition 6.4
Si f est dérivable en x_0 et si x_0 est un extremum de f alors $f'(x_0) = 0$

La réciproque est fausse. Par exemple $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum de f.
Néanmoins, cette proposition est intéressante car elle permet de localiser les extrémas d'une fonction dérivable.

Proposition 6.5 (monotonie et dérivée)
Soient f et g deux fonctions dérivables sur I.

1. *On a l'égalité $f' = g'$ sur l'intervalle I si et seulement si $f - g$ est constante sur I.*
   En particulier, la fonction f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, \quad f'(x) = 0$.
2. *La fonction f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) > 0$).*
3. *f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I ssi $\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$ (resp. $f'(x) < 0$).*

Remarque 6.1
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Une méthode pour justifier qu'une égalité $f \leqslant g$ est vraie I est d'introduire la fonction $k = f - g$, de dresser ses variations (via la dérivée en général), de placer les bornes dans son tableau de variations et si l'on est un peu chanceux, on en déduit aisément que la fonction k est négative sur I.

Il est parfois utile d'utiliser la notion de dérivée gauche ou droite..

Définition 6.2 (dérivée gauche et droite)
On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 ssi la limite $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (resp. $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$) existe et est finie.
Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée à droite (resp. à gauche) de f en x_0 et se note $f'(x_0^-)$ (resp. $f'(x_0^+)$).

Définition 6.3
On dit que f que est dérivable sur l'intervalle fermé $[a; b]$ si et seulement si f est dérivable en tout point x_0 appartenant à $]a; b[$ et si elle est dérivable à droite en a et si elle est dérivable à gauche en b