Cours de PHEC option éco première année

par Bechata Abdellah

Table des matières

1 Introduction aux fonctions d'une variable réelle **1**
1 Ensembles usuels et vocabulaire ensembliste . . . 1
2 Généralités sur les fonctions. . . . 1
3 Applications aux fonctions usuelles. . . . 3
4 Rappel sur la dérivation et les tangentes . . . 6

2 Fonctions numériques de deux variables réelles **7**
1 $\mathbb{R}^2$ et quelques uns de ses sous-ensembles remarquables . . . 7
2 Fonctions numériques de deux variables réelles . . . 8

3 Polynômes **11**

4 Principe de récurrence et symboles de sommations **15**
1 Symboles de sommations . . . 15
2 Principe de récurrence. . . . 16

5 Dénombrement **17**
1 Opérations sur les ensembles . . . 17
2 cardinaux . . . 17
3 p-listes . . . 18
4 Parties d'un ensemble . . . 19

6 Suites **21**
1 Limites de suites. . . . 21
2 Opérations sur les limites. . . . 21
3 Limites et inégalités. . . . 22
4 Outils de comparaisons . . . 23
5 Convergences de suites particulières. . . . 24

7 Espaces probabilisés **27**
1 Notion d'application . . . 27
2 Mathématisation de la notion d'évènement . . . 27
3 Espace probabilisé fini . . . 28
4 Probabilités conditionnelles . . . 30
5 Indépendances en probabilité . . . 30

8 Limites **33**
1 définitions . . . 33
2 Opérations sur les limites . . . 34
3 Limites classiques et applications . . . 35
4 Cas des fonctions monotones . . . 35

9 Comparaison de fonctions **37**
1 Equivalence . . . 37
2 Négligeabilité . . . 38
3 Développement limités . . . 39
4 Applications des DL . . . 40

10 Variables et vecteurs aléatoires finies **43**
1 Définitions . . . 43
2 Loi d'une var finie . . . 43
3 Moments d'une var finie . . . 44
4 Loi d'un vecteur aléatoires finis . . . 46

5 Lois conditionnelles . . . 47
6 Indépendances de n var . . . 47

11 Continuité **49**
1 Définitions et propriétés algébriques . . . 49
2 Prolongement par continuité . . . 50
3 Propriétés des fonctions continues . . . 50
4 Bijections . . . 51

12 Dérivabilité et fonctions de classe C^k **53**
1 Généralités . . . 53
2 Règles de calculs . . . 54
3 Fonctions monotones . . . 54
4 Prolongement . . . 55
5 Théorème des accroissement finis . . . 55
6 Convexité . . . 56

13 Lois discrètes finies **57**
1 Loi uniforme . . . 57
2 Schéma de Bernouilli . . . 57
3 Loi binomiale . . . 57
4 Loi hypergéométrique . . . 58

14 Séries **59**
1 Définitions et propriétés élémentaires . . . 59
2 Critères de convergence des séries à termes positifs. . . . 60
3 Séries de références. . . . 61
4 Plan d'étude d'une série . . . 62

15 Intégration sur un segment **63**
1 Primitive . . . 63
2 Intégration sur un segment . . . 63
3 Calcul intégral . . . 65
4 Somme de Riemann . . . 66

16 Espace probabilisé et var discrète infinie **69**
1 Espace probabilsé . . . 69
2 Variables et vecteurs aléatoires discrets dénombrable . . . 71
3 Moments d'une var discrète infinie . . . 71
4 Loi d'un vecteur aléatoires discrets infinis . . . 73
5 Lois conditionnelles . . . 73
6 Indépendances de n var . . . 74
7 Lois discrètes infinies . . . 74

17 Plan d'études des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ **77**
1 Intervalles stables et points fixes . . . 77
2 Existence de tous les termes de la suite . . . 77
3 Monotonie de la suite . . . 78
4 Convergence . . . 79

18 Systèmes d'équations linéaires **81**
1 Définitions . . . 81
2 Pivot de Gauss . . . 81
3 Résolution des systèmes . . . 83

19 Matrices **85**
1 Matrices rectangulaires . . . 85
2 Matrices carrés . . . 86
3 Systèmes linéaires et matrices . . . 88

Introduction aux fonctions d'une variable réelle

1 Ensembles usuels et vocabulaire ensembliste

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels c'est-à-dire $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..\}$

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres relatifs c'est-à-dire des entiers naturels ainsi que leurs opposés.

$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationels c'est-à-dire des fractions dont le numérateurs et le dénominateurs sont des nombres entiers relatifs.

Par exemple : $\dfrac{2002}{2003}$. Par contre $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ n'est pas un nombre rationnel car $\sqrt{2}$ n'est pas un entier relatif.

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels c'est-à-dire de tous les nombres que vous avez rencontré dans votre scolarité. Par exemple : 2, -13, $\dfrac{2002}{2003}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, π, e^6 etc.

Définition 1
Soient E un ensemble, A, B deux sous-ensembles de E et x un élément de E. On note

- *$x \in A$ si l'élément x appartient à A.*
- *$x \notin A$ si l'élément x n'appartient pas à A.*
- *$A \subset B$ si tout élément de A est un élément de B c'est-à-dire $x \in A$ alors $x \in B$.*
- *$A \subsetneq B$ s'il existe un élément y de A qui ne soit pas un élément de B c'est-à-dire il existe $y \in A$ tel que $y \notin B$.*

Définition 2
L'ensemble noté $\varnothing$ est appelé ensemble vide et est constitué d'aucun élément.

2 Généralités sur les fonctions.

2.1 Définitions.

Définition 3

1. *On dit qu'une fonction f est une fonction numérique d'une variable réelle s'il existe un ensemble I (qui n'est pas nécessairement un intervalle) de $\mathbb{R}$ tel que chaque nombre $x \in I$ posséde une image $f(x)$ qui soit un nombre réel.*
2. *Les nombres réels qui possède une image par f constituent l'ensemble de définition de f. Il est noté traditionnellement $\mathcal{D}_f$.*
3. *a est un antécédent de b par f si b est l'image de a par f. Les nombres réels qui possède au moins un antécédent par f constituent l'ensemble image de f, que l'on note $f(\mathcal{D}_f)$.*
4. *L'ensemble des points (du plan cartésien) de coordonnées $(x, f(x))$, où x est un élément de $\mathcal{D}_f$, est la courbe représentative de f.*
5. *Si f est une fonction de domaine $\mathcal{D}_f$ et si A désigne une partie de $\mathbb{R}$ contenue dans $\mathcal{D}_f$, on appelle restriction de f à A la fonction $f_{|A}$ dont le domaine de définition est A et qui est définie par*

$$\forall x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x).$$

Remarque 1

1. On remarquera que l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas nécessairement un intervalle.
Par exemple, si $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ alors $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty[$
2. Soit $f(x) = 3x$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Si $A =]-2, 4]$, alors la restriction de f à A est une fonction qui n'est définie que sur A par

$$\forall x \in]-2, 4],\ f_{|]-2,4]}(x) = 3x.$$

2.2 Eléments remarquables d'une fonction.

Définition 4
Soit f une fonction définie sur I.

1. *On dit qu'un nombre réel M (resp. m) majore (resp. minore) la fonction f sur I lorsque*

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant M \quad (\text{resp. } \forall x \in I,\ f(x) \geqslant m).$$

   Dans ce cas on dit que M (resp. m) est un majorant (minorant) de f sur I.

2. *Soit x_0 un élément de I. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) en x_0 si*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{resp. } \forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \geqslant f(x_0)).$$

   On note $\underset{I}{max} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\min\limits_I f(x) = f(x_0)$). Un extremum de f sur I est soit un minimum soit un maximum.

3. *On dit que f est bornée sur I si elle est à la fois majorée et minorée sur I.*

Exemple 1
Un tableau de variation montre qie la fonction $f(x) = 3x$ est bornée sur $]-2,4]$ et que

$$\forall x \in]-2,4],\ f(x) \leqslant 12 \text{ et } \forall x \in]-2,4],\ f(x) \geqslant -6),$$

ce que l'on peut résumer par

$$\forall x \in]-2,4],\ \ -6 \leqslant f(x) \leqslant 12$$

La fonction f possède un maximum sur $]-2,4]$ en $x_0 = 4$ et $\underset{]-2,4]}{max} f(x) = 12$. Par contre, elle ne possède pas de minimum (le seul possible serait en -2 qui n'est pas dans l'intervalle $]-2,4]$, bien que l'on constate qu'elle possède un plus petit minorant (qui est -6) ce qui amène à introduire la définition suivante.

Définition 5
Si f est une fonction majorée (resp. minorée) sur I, on appelle borne supérieure (resp. inférieure) le plus petit des majorants de f (resp. le plus grand des minorant de f) sur I. On a la note $\sup\limits_I f$ (resp. $\inf\limits_I f$).

Dans l'exemple précédent, $\sup\limits_{]-2,4]} f = 12$ et $\inf\limits_{]-2,4]} f = -6$. On constate ici que le sup de la fonction est tout simplement le maximum de f. C'est un fait général : si une fonction possède un maximum (resp. minimum) sur un intervalle I, alors le $\sup\limits_I f$ (resp. $\inf\limits_I f$) est égal au $\max\limits_I f$ (resp. $\min\limits_I f$).

2.3 Fonctions remarquables.

Définition 6 (parité)
On dit que f est paire (resp. impaire) si

$$\left\{\begin{array}{c} \forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f \\ \text{et } \forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x)\ (\text{resp.} f(-x) = -f(x). \end{array}\right.$$

Exemple 2

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est une fonction paire car d'une part $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, donc si $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et d'autre part, on a

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$$

2. Par contre la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ n'est pas une fonction paire ou impaire car $\mathcal{D}_f =]-\infty, 2[\bigcup]2, +\infty[$ *donc* $-2 \in \mathcal{D}_f$ mais $2 \notin \mathcal{D}_f$.

Définition 7 (Monotonie)
Soit I un intervalle sur lequel f est définie; on dit que

1. *f est croissante (resp. décroissante) sur I lorsque*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \left\{\begin{array}{c} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \\ (\text{resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2). \end{array}\right.$$

2. *f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I lorsque*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \begin{cases} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ (\text{resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \end{cases}$$

3. *On dit qu'une fonction est monotone sur un intervalle si elle est croissante (ou décroissante) sur cet intervalle.*

Proposition 1

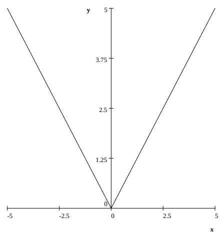
1. *La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).*
2. *Si f est croissante (resp. décroissante) sur I et g est croissante (resp. décroissante) sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est croissante sur I.Si La composée de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante.*
3. *Si f est croissante sur I et g est décroissante sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est décroissante sur I. De même, si f est décroissante sur I et g est croissante sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est décroissante sur I*

Exemple 3
$h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^-$. En effet, elle est la composée de la fonction $f(x) = x^2 + 1$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ avec $f(\mathbb{R}^-) = [1, +\infty[$ et de la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est décroissante sur $[1, +\infty[$.

3 Applications aux fonctions usuelles.

3.1 Valeur absolue

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est la fonction dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$ et définie par $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0. \end{cases}$ et dont voici la représentation graphique. C'est une fonction paire, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.



$x \mapsto |x|$

Lemme 1 (Inégalité triangulaire)
$\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a $\big|\, |a| - |b| \,\big| \leqslant |a - b|$ et $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

3.2 Fonction puissances entières $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$

Définition 8 (n positif)
Soit x un nombre réel et n un entier positif, on pose $x^0 = 1$ (lorsque $x \neq 0$) et $x^n = \underbrace{x \times x \times .. \times x}_{n \text{ fois}}$ si $n \geqslant 1$.

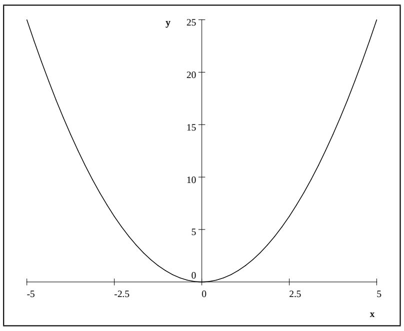
Définition 9 (n négatif)
Soit x un nombre réel et n un entier négatif, on pose $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$.

Exemple 4
$x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$

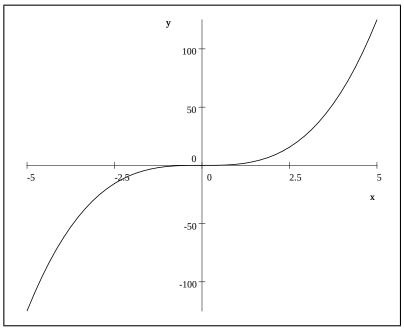
Proposition 2 (Règles de calcul)
$\forall n, m \in \mathbb{Z}$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}^\times$

$$\begin{array}{lll} a^n \times a^m = a^{n+m} & (a \times b)^n = a^n \times b^n & (a^n)^m = a^{n \times m} \\ a^0 = 1 & a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} & \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \end{array}$$

La fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ si n est un entier positif et est paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair) dont la représentation graphique est

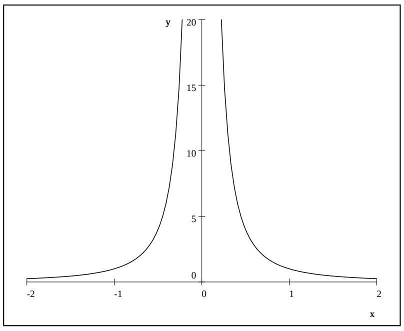


$x \mapsto x^n$ si n est pair

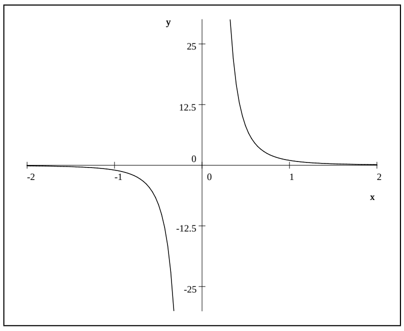


$x \mapsto x^n$ si n est impair

La fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^\times$ si n est un entier négatif et est paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair) dont la représentation graphique est



$x \mapsto x^n$ si n est pair

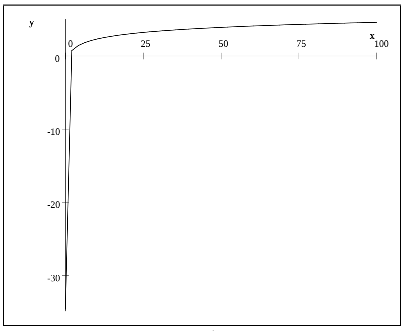


$x \mapsto x^n$ si n est impair

3.3 fonction logarithme népérien

La construction rigoureuse de la fonction $x \mapsto \ln x$ sera effectuer dans le chapitre sur l'intégration. Néanmoins nous allons rappeller quelques propriétés de cette fonction.

La fonction ln est définie sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^\times$ et sa représentation graphique est



$x \mapsto \ln x$

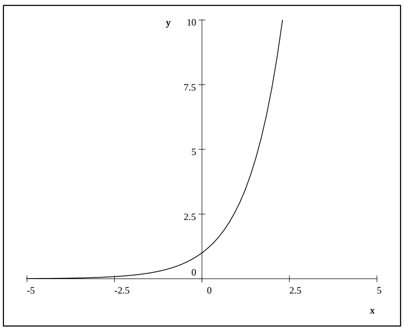
Proposition 3 (propriétés remarquables du logarithme)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^\times \quad \begin{array}{ll} \ln(a \times b) = \ln a + \ln b & \ln(\dfrac{a}{b}) = \ln a - \ln b \\ \ln(\dfrac{1}{a}) = -\ln a & \forall n \in \mathbb{Z},\, \ln a^n = n \ln a \\ \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b & \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b \\ \ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1 & \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e \text{ avec } e \simeq 2.718 \end{array}$$

3.4 fonction exponentielle

La construction de la fonction exponentielle $x \mapsto \exp x$ (ou encore e^x) nécessite la définition de la fonction logaritme népérien et du chapitre sur les dérivées. Nous admettons son existence et nous explicitons certaines de ces propriétés.

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et la représentation graphique de la fonction exponentielle est



$x \mapsto e^x$

Proposition 4 (propriétés remarquables de l'exponentielle)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^\times \quad \begin{array}{ll} \exp(a \times b) = \exp a \times \exp b & \exp(a-b) = \dfrac{\exp a}{\exp b} \\ \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)} & \forall n \in \mathbb{Z},\ (\exp a)^n = \exp(na) \\ \exp a = \exp b \Leftrightarrow a = b & \exp a < \exp b \Leftrightarrow a < b \\ \exp a = 1 \Leftrightarrow x = 0 & \end{array}$$

Proposition 5 (lien entre exponentielle et logarithme)
En outre, comme nous le verrons dans le chapitre sur les dérivées les fonctions exp *et* ln *sont intimement liées, ce qui se traduit par la formule suivante*

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}_+^\times \quad e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$$

ce qui implique que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times \quad e^{\ln x} = x.$$

Nous avons également la formule suivante qui est fondamentale

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln e^x = x$$

3.5 Fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Définition 10
La fonction $x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ est définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par

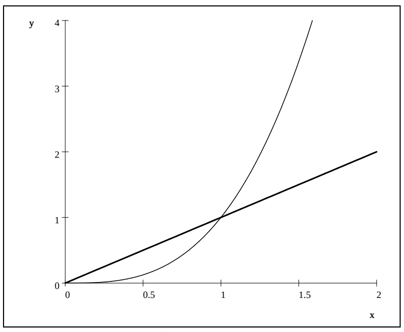
$$x^\alpha \underset{\text{par définition}}{=} e^{\alpha \ln x}$$

Les règles de calculs sont similaires à celles des fonctions puissances entières et nous les explicitons dans la proposition suivante

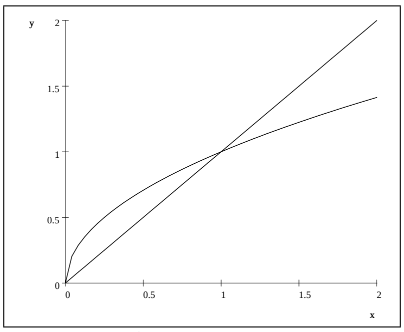
Proposition 6

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \forall x, y \in \mathbb{R}_+^\times \quad \begin{array}{lll} x^\alpha \times y^\beta = a^{\alpha+\beta} & (x \times y)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha & (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \times \beta} \\ x^0 = 1 & x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha} & \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha - \beta} \end{array}$$

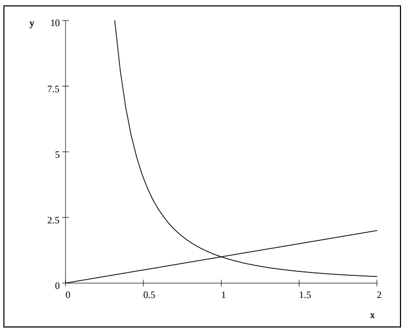
La représentation graphique des différentes fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ est donnée par les graphiques suivants



$y = x^\alpha$ lorsque $\alpha > 1$



$y = x^\alpha$ lorsque $0 < \alpha < 1$



$y = x^\alpha$ lorsque $\alpha < 0$

3.6 Fonctions polynômes

Définition 11

1. *On appelle fonction monôme (ou simplement monôme) toute fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *et de la forme*

$$x \mapsto a_k x^k \text{ où } a_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.\ a_k \text{ est le coefficient du monôme}$$

2. *On appelle fonction monôme (ou simplement monôme) toute fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *et de la forme*

$$x \mapsto P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

   où $a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \{0,..,n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
   Les nombres a_k *sont les coefficients du polynôme. Si* $a_n \neq 0$, *on dit que le polynôme* P *est de degré* n *et on note* $\deg P = n$. *Dans ce cas,* a_n *est son coefficient dominant.*
   Si tous les coefficients sont nuls, on dit que P *est le polynôme nul. Le polynôme nul ne possède pas de degré.*

3. *Deux polynômes* $P = a_0 + a_1 x + .. + a_n x^n$ *et* $Q = b_0 + b_1 x + .. + b_m x^m$ *sont égaux ssi* $n = m$ *et* $\forall k \in \{0,..,n\}\ a_k = b_k$.

4. *On note* $\mathbb{R}[X]$ *l'ensemble des polynômes et* $\mathbb{R}_n[X]$ *l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à* n.

Exemple 5

1. $x \mapsto x^{2002}$ est un monôme de degré 2002 et 1 est son coefficient.

2. Le polynôme $x \mapsto 7x^3 - 3x^2 + 10$ est de degré 3 et son coefficient dominant est 7.

3. Si $ax^2 + bx + c = 3x + 2 = 0x^2 + 3x + 2$ alors $a = 0$, $b = 3$ et $c = 2$

4 Rappel sur la dérivation et les tangentes

Nous rappelons pas dans cette section la définition et les différentes propriétés de la dérivée qui sera vue dans un chapitre ultérieur. Nous admettrons que les formules suivantes sont valides

$f(x)$	$f'(x)$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}
x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$(u(x))^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$
$(u(x))^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha \times u'(x) \times (u(x))^{\alpha-1}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln u(x)$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Si f est une fonction dérivable en a, on appelle tangente à la coube représentation $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse $x = a$, la droite d'équation

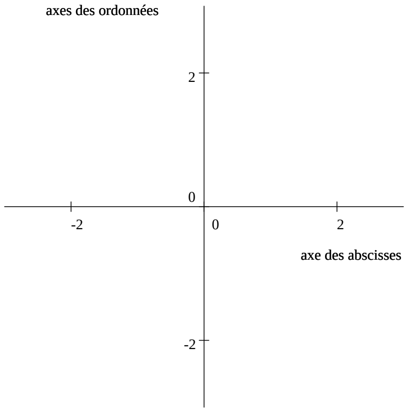
$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \qquad \text{(Equation de la tangente au point d'abscisse } x = a\text{)}$$

Fonctions numériques de deux variables réelles

1 $\mathbb{R}^2$ et quelques uns de ses sous-ensembles remarquables

1.1 $\mathbb{R}^2$

Rappellons pour commencer que $\mathbb{R}^2$ désigne l'ensemble des couples (x, y) où x et y sont des nombres réels. Traditionnellement, on représente graphiquement $\mathbb{R}^2$ sous la forme d'un plan muni du repère orthonormée $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Un élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ est associé au point M du plan de coordonnées (x, y). D'autre part tout point M du plan est associé naturellement à son couple de coordonnées (x, y) qui est un élément de $\mathbb{R}^2$.



représentation graphique de $\mathbb{R}^2$

1.2 *Droites*

L'axe des abscisses se note traditionnellement (Ox) (il s'agit d'une droite) et l'axe des ordonnées (Oy). L'équation de la droite (Ox) est l'ensemble des points $M(x, y)$ dont l'ordonnée est nulle donc

$$(0x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = 0\}$$

On dit que $y = 0$ est l'équation de la droite (Ox). De façon analogue, la droite (Oy) a pour équation $x = 0$ i.e. possède comme équation

$$(0y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = 0\}$$

Plus généralement, toute droite du plan possède une équation du type

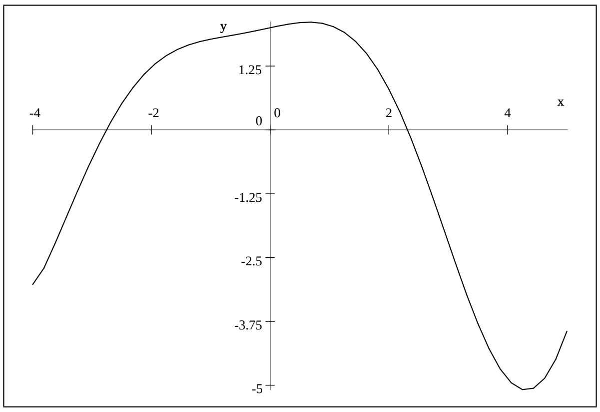
$$y = ax + b \text{ ou } x = c$$

ou de manière équivalente, l'équation de toute droite du plan est de la forme

$$ax + by + c = 0$$

1.3 *Graphiques de fonctions d'une variable*

Si f désigne une fonction d'une variable réelle dont le domaine de définition est un ensemble I. La représentation graphique de f, qui est définie rappelons-le par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in I \text{ et } y = f(x)\}$.



On déduit naturellement trois nouveaux sous-ensembles remarquables

1. L'ensemble "au dessus" (resp. strictement "au dessus") du graphique de f est défini par
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in I \text{ et } y \geqslant f(x) \text{ (resp. } y > f(x))\}$$
2. L'ensemble "en dessous" (resp. strictement "en dessous" du graphique de f est défini par
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in I \text{ et } y \leqslant f(x) \text{ (resp. } y < f(x))\}$$
3. L'ensemble complémentaire du graphique de f ("tout sauf le graphe de f") défini par
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in I \text{ et } y \neq f(x)\}$$
qui n'est que la réunion des ensembles "au dessus et en dessous" du graphique de f.

1.4 Cercles

Un autre type sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ est fourni par les cercles. Par exemple, le cercle de centre l'origine $(0,0)$ et de de rayon r possède comme équation
$$C(O,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 = r^2\}$$
Plus généralement, l'équation du cercle $C((a,b),r)$ de centre (a,b) et de rayon r est
$$C((a,b),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

2 Fonctions numériques de deux variables réelles

Définition 12
On appelle fonction numérique de deux variables réelles la donnée d'un sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^2$ et d'une application qui à tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe un unique nombre réel $f(x,y)$.

Exemple 6
Les fonctions $f(x,y) = x + y$ et $g(x,y) = \exp(xy) + y^2 - 1$ sont des fonctions numériques de deux variables réelles

Définition 13
Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels l'expression $f(x,y)$ existe

Exemple 7
Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \ln(x+y)$. L'expression $f(x,y)$ est définie si et seulement si $x + y > 0 \Leftrightarrow y > -x$.

Définition 14
Soit f une fonction numérique de deux variables réelles. On appelle surface de niveau c l'ensemble des points (x,y) du plan tels que $f(x,y) = c$ (f est constante sur la ligne de niveau)

Exemple 8
La surface de niveau c de la fonction $x + 3y$ est l'ensemble
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 2x + 3y = 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y = \frac{c}{3} - \frac{2x}{3}\}.$$
Il s'agit donc d'une droite. De la même façon, on constate que toutes les surfaces de niveau de cette fonction sont des droites du plan.

Exemple 9
La surface de niveau c de la fonction $x^2 + y^2$ est l'ensemble $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 = c\}$.
On remarque pour commencer que x^2 et y^2 sont toujours des nombres positifs donc x^2+y^2 est toujours positif. Par conséquent,

1. si c est strictement négatif, l'ensemble N_c se réduit à l'ensemble vide.
2. si c est nul, on a $x^2 + y^2 = 0$ ce qui implique que $x = y = 0$ donc $N_c = \{(0, 0)\}$
3. si c est strictement positif, l'ensemble N_c est un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{c}$.

Polynômes

Diverses définitions sur les polynômes ont été données dans le chapitre sur l'introduction aux fonctions d'une variable réelle

Proposition 7

1. *Le degré d'un monôme constant non-nul est* 0.
2. $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$
3. $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

0.1 Divisibilté

Définition 15

Soient A *et* $B \in \mathbb{R}[X]$. *On dit que* B *divise* A *et on le note* $B \mid A$ *ssi* $\exists C \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $A = BC$.

Proposition 8

1. *Si* $B \mid A$ *alors* $\deg B \leqslant \deg A$
2. $\forall A \in \mathbb{R}[X]$, $A \mid A$
3. *Si* $A \mid B$ *et* $B \mid C$ *alors* $A \mid C$.
4. *Un polynôme constant non nul divise n'importe quel polynôme.*

0.2 Zéros d'un polynôme

Définition 16

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ *et* $a \in \mathbb{R}$. *On dit* a *est un zéro de* P *ssi* $P(a) = 0$.

Théorème 1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ *et* $a \in \mathbb{R}$. *Alors* a *est un zéro de* P *ssi* $(x-a) \mid P$

Définition 17

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ *et* $a \in \mathbb{R}$. *On dit* a *est un zéro d'ordre* k *de* P *ssi* $(x-a)^k \mid P$ *et* $(x-a)^{k+1} \nmid P$.

0.3 Dérivées d'un polynôme

Définition 18

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$.

1. *On appelle polynôme dérivé de* P *et on le note* P' *le polynôme défini par*

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1$$

2. *Le polynôme dérivé seconde de* P *(que l'on note* P'' *ou* $P^{(2)}$*) est le polynôme dérivé du polynôme dérivé de* P *c'est-à-dire* $P^{(2)} = (P')'$
3. *Plus généralement, si l'on dérive* k *fois successivement le polynôme* P, *on obtient le polynôme dérivé d'ordre* k *(ou dérivée* $k^{\text{ème}}$*) de* P *et on le note* $P^{(k)}$.

Théorème 2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ *et* $a \in \mathbb{R}$. *Alors* a *est zéro d'ordre* k *de* P *ssi* $P(a) = P'(a) = .. = P^{(k-1)}(a) = 0$ *et* $P^{(k)}(a) \neq 0$

Exemple 10

Soit $P(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$.

1. On constate que 1 est racine évidente de P. Calculons les dérivées successives de P évaluées en 1.

$$\begin{array}{lll} P(1)=0 & & \\ P'(x)=4x+12x^2-16x^3+5x^4-5 & \text{donc} & P'(1)=0 \\ P''(x)=24x-48x^2+20x^3+4 & \text{donc} & P''(1)=0 \\ P^{(3)}(x)=-96x+60x^2+24 & \text{donc} & \text{donc } P^{(3)}(1)=-14\neq 0 \end{array}$$

D'après le théorème 1 est racine d'ordre 4 de P donc $(x-1)^3 \mid P$ c'est à dire qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que

$$P(x)=(x-1)^3Q(x)$$

avec $Q(1)\neq 0$.

2. Cette méthode va en fait nou permettre de factoriser le polynôme P.
On remarque -1 est une utre racine évidente de P. Les calculs précédents montre que $P(-1)=0$ et $P'(-1)=24\neq 0$ donc -1 est racine d'ordre 1.

3. On a $\underbrace{P(-1)}_{=0}=\underbrace{(-1-1)^3}_{\neq 0}Q(-1)$ donc $Q(-1)=0$. Il existe donc un polynôme $R(x)$ tel que $Q(x)=(x-(-1))R(x)$ ce qui montre que
$$P(x)=(x-1)^3(x+1)R(x) \tag{3.1}$$

4. $\deg P=\deg(x-1)^3+\deg(x+1)+\deg R$ donc $\deg R=1$ ce qui implique que R est de la forme
$$R(x)=ax+b$$
En développant la formule 3.1, et en regardant le coefficient de plus haut degré et de plus petit degré, on a $a=1$ et $b=-2$. Ainsi
$$P(x)=(x-1)^3(x+1)(x-2)$$

0.4 Division euclidienne

Rappelons que si a et b sont deux entiers avec $b\neq 0$, il existe un unique entier q et un unique entier $0\leqslant r<b$ tel que

$$a=bq+r.$$

L'entier q s'appelle le quotient de la division euclidienne de a par b et r le reste de cette division euclidienne.

Il existe une formule analogue pour les polynômes.

Théorème 3
Soient A et B deux polynômes réels où B est un polynôme non nul.
Il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R tel que $\deg R<\deg B$ *et tel que*

$$A=BQ+R.$$

Le polynôme Q s'appelle le quotient de la division euclidienne de A par B et R le reste de cette division euclidienne.

Corollaire 1
Un polynôme P divise un polynôme Q ssi le reste de la division de P par Q est nul

Nous allons traiter sur un exemple la détermination explicite du quotient et du reste d'une division euclidienne

Exemple 11
Déterminer le reste et le quotient de la division de $2x^3+x^2-5x+5$ par x^2-2 :
On pose la bonne vielle division et on commence par éliminer le terme $2x^3$. Pour cela, il suffit de multiplier le dividende par $2x$

$$\begin{array}{ccccc|l} 2x^3 & +x^2 & -5x & +5 & & x^2-2 \\ \cline{6-6} - & (2x^3-2x) & & & & 2x \\ & 3x^2 & -2x & +5 & & \end{array}$$

puis on élimine le terme de degré 2 en multipliant le dividende par 2 ce qui nous donne

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+x^2-5x+5 & x^2-2 \\ \cline{2-2} -(2x^3-2x) & 2x+3 \\ 3x^2-2x+5 & \\ -(3x^2-6) & \\ -5x+11 & \end{array}$$

Le reste de notre division est un polynôme de degré 1 donc de degré strictement inférieur au degré du diviseur ce qui signifie que notre division est achevée et on a la relation

$$2x^3 + x^2 - 5x + 5 = (2x + 3)(x^2 - 2) - 5x + 11$$

L'intérêt de la division euclidienne apparait lors de la factorisation des polynômes. Si vous disposez d'une racine évidente a d'un polynôme P, le théorème 1 montre que $(x - a)$ divise P donc il existe un polynôme Q tel que $P = (x - a)Q$. Pour déterminer Q, il suffit d'effectuer la division de P par $x - a$ et le quotient est Q (bien entendu, le reste de la division se doit d'être nul car P divise Q)

Principe de récurrence et symboles de sommations

1 Symboles de sommations

Définition 19
Soit n et m deux entiers. On désigne par $\{n, .., m\}$ l'ensemble des entiers compris entre n et m.

Lemme 2
1. *Il y a n nombre entier dans l'ensemble $\{1, .., n\}$.*
2. *Plus généralement, il y a $n - m + 1$ entier dans l'ensemble $\{n, .., m\}$.*

Définition 20
1. *Soient $a_0, a_1, .., a_n$ $(n + 1)$ nombres réels.*
   La notation symbolique $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ désigne la somme $a_0 + a_1 + .. + a_n$ et elle se prononce somme de $k = 0$ à n des a_k.
2. *Plus généralement, si $a_n, a_{n+1}, .., a_m$ sont des nombres réels.*
   La notation symbolique $\sum\limits_{k=n}^{m} a_k$ désigne la somme $a_n + a_{n+1} + .. + a_m$ et elle se prononce somme de $k = n$ à m des a_k.

Exemple 12
1. $\ln(2) + \ln(3) + .. + \ln(n)$ peut s'écrire aussi $\sum\limits_{k=2}^{n} \ln(k)$.
2. **Question** : que représente la notation symbolique $\sum\limits_{k=8}^{29} \frac{1}{7k^2}$?
   Réponse : $\frac{1}{7 \times 1^2} + \frac{1}{7 \times 2^2} + \frac{1}{7 \times 3^2} + .. + \frac{1}{7 \times 29^2}$.

Le symbole de sommation $\sum$ vérifie certaines règles de calculs qui sont d'utilisation courante et que nous énonçons dans le lemme suivant.

Lemme 3
Soient n, m deux entiers et $a_n, a_{n+1}, .., a_m$ et $b_n, b_{n+1}, .., b_m$ des nombres réels. Alors on a

1. $\sum\limits_{k=n}^{m} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=n}^{m} a_k + \sum\limits_{k=n}^{m} b_k$
2. $\sum\limits_{k=n}^{m} (a_k - b_k) = \sum\limits_{k=n}^{m} a_k - \sum\limits_{k=n}^{m} b_k$
3. *Pour tout nombre réel λ,* $\sum\limits_{k=n}^{m} \lambda a_k = \lambda \sum\limits_{k=n}^{m} a_k$
4. ***Relation de Chasles.***
   Pour tout entier positif l, on a $\sum\limits_{k=n}^{m+l} a_k = \sum\limits_{k=n}^{m} a_k + \sum\limits_{k=m+1}^{l} a_k$

Preuve :
On ne prouvera que la première égalité, les autres se prouvant de la même façon.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m} (a_k + b_k) &= (a_n + b_n) + (a_{n+1} + b_{n+1}) + ..(a_m + b_m) \\
&= (a_n + a_{n+1} + ..a_m) + (b_n + b_{n+1} + ..b_m) \\
&= \sum_{k=n}^{m} a_k + \sum_{k=n}^{m} b_k.
\end{aligned}$$

cqfd. ■

Proposition 9
Sommes remarquables
Soit n un entier positif. Alors on a les égalités suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. *pour tout nombre réel q différent de 1, on a* $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

On remarque que $\sum_{k=l}^{n} a_k = \sum_{j=l}^{n} a_j = \sum_{\alpha=l}^{n} a_\alpha$. "L'entier" k est ce que l'on appelle l'indice de sommation de la somme $\sum_{k=0}^{n} a_k$. Il s'agit d'une variable muette c'est-à-dire que l'on peut la noter k, j, α ou encore à l'aide de toute lettre que l'on souhaite. On utilisera régulièrement cette remarque lors des changements de variables qui sont définis par le lemme dont voici l'énoncé.

Lemme 4
Changement de variable
Soient l, n, m des entiers et $a_{n+l}, a_{n+l+1}, .., a_{m+l}$ des nombres réels.
Alors $\sum_{k=n}^{m} a_{k+l} = \sum_{k=n+l}^{m+l} a_k$ *(on dit que l'on a fait le changement de variable $j = k + l$).*

Exemple 13
Simplifier $\sum_{k=3}^{10} \dfrac{k^2+k-2}{k-2}$ en utilisant le changement de variable $j = k - 2$.
On adopte la méthode mnémotechnique suivante :
On pose $j = k - 2$ alors $k = j + 2$, ce qui nous donne
$\dfrac{k^2-k-2}{k-2} = \dfrac{(j+2)^2-(j+2)-2}{j} = \dfrac{j^2+3j}{j} = j - 3.$
D'autre part, quand $k = 3$, alors $j = 1$ et quand $k = 10$ alors $j = 8$.
Donc $\sum_{k=3}^{10} \dfrac{k^2+k-2}{k-2} = \sum_{j=1}^{8} (j+3)$

2 Principe de récurrence.

Supposons avoir défini pour tout entier $n \geqslant 0$ une propriété $\mathcal{P}_n$.

Lemme 5
Principe de récurrence
Soit n_0 un entier positif. Supposons que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie. Si $\forall n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}_n$ est vraie implique $\mathcal{P}_{n+1}$ alors $\forall n \geqslant n_0$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie .

La propriété $\mathcal{P}_n$ se nomme la propriété $\mathcal{P}$ au rang n.
La vérification de la véracité de $\mathcal{P}_{n_0}$ s'appelle l'initialisation de la récurrence.

Exemple 14

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $2^n \geqslant n+1$. On pose $\mathcal{P}_n$: "$2^n \geqslant n+1$".
   Initialisation : $n = 0$. $2^0 = 1 \geqslant 0 + 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Nous devons prouver que $\mathcal{P}_{n+1}$, c'est-à-dire que $2^{n+1} \geqslant n+2$.
   $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ donc $2^{n+1} \geqslant 2(n+1) = 2n+2$. Or $2n+2-(n+2) = n \geqslant 0$ donc $2n+2 \geqslant n+2$. Par conséquent $2^{n+1} \geqslant n+2$, ce qui démontre que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Ainsi $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n positif.

2. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $1+2+..+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
   On pose $\mathcal{P}_n$: "$1+2+..+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$".
   Initialisation : $n = 1$. Le membre de gauche de l'égalité est égal à 1.
   Le membre de droite est égal à $\dfrac{1\times 2}{2} = 1$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Le membre de droite de $\mathcal{P}_{n+1}$ est
   $1+2+..+n+(n+1)$. Donc, puisque $\mathcal{P}_n$ est vraie, on a
   $1+..+n+(n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\dfrac{n}{2}+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et donc $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie c'est-à-dire $\forall n \geqslant 1$, $1+2+..+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Dénombrement

1 Opérations sur les ensembles

Définition 21
Soit E un ensemble. . On note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-parties de E.

Exemple 15
$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Définition 22
Soient A et B deux sous-ensembles de E.

- *$A \cup B = \{x \in E$ tel que $x \in A$ ou $x \in B\}$.*
- *$A \cap B = \{x \in E$ tel que $x \in A$ et $x \in B\}$.*
- *$A \backslash B = \{x \in E$ tel que $x \in A$ et $x \notin B\}$. L'ensemble $A \backslash B$ se note encore $\mathcal{C}_A B$. Dans le cas particulier où $A = E$, $E \backslash A$ se note également $\mathcal{C}A$ ou $\overline{A}$.*
- *si $A \cap B = \varnothing$ on dit que A et B sont disjoints.*

Exemple 16
On considère l'ensemble $E = \{0,1,2,3,4,5\}$ ainsi que ses sous-ensembles donnés par $A = \{0,1,3,4\}$ et $B = \{2,3,4\}$. Alors $A \cup B = \{0,1,2,3,4\}$, $A \cap B = \{3,4\}$, $A \backslash B = \{0,1\}$

Définition 23
Soient E et I deux ensembles. Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E. On dit que la famille $(E_i)_{i \in I}$ est une partition de E ssi ($E = \bigcup\limits_{i \in I} E_i$ et $E_i \cap E_j = \varnothing$ si $i \neq j$ $\forall i, j \in I$).

Définition 24

- *Soient E et F deux ensembles. On note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y est un élément de F. Cet ensemble se prononce E croix F.*
- *Plus généralement, si $E_1, E_2, .., E_n$ sont n ensembles, on note $E_1 \times E_2 \times .. \times E_n$ l'ensemble formé des $n-$uplets de la forme $(x_1, x_2, .., x_n)$ avec $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2, .., x_n \in E_n$.*
- *Si, en outre $E_1 = E_2 = .. = E_n = E$, alors l'ensemble $E_1 \times E_2 \times .. \times E_n$ est noté conventionnellement E^n.*

Exemple 17

- $(-3, \pi)$ est un élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ car $-3 \in \mathbb{Z}$ et $\pi \in \mathbb{R}$. Par contre $(\frac{1}{2}, \sqrt{2})$ n'est pas un élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ car, bien que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{R}^4$ désigne les $4-$uplets de la forme (x_1, x_2, x_3, x_4) tel que les quatre éléments x_1, x_2, x_3, x_4 sont des nombres réels.

2 cardinaux

Définition 25
Soit A un ensemble comportant un nombre fini d'éléments. On appelle cardinal de A le nombre d'éléments de A et on le note $card(A)$ ou $|A|$ voire encore $\#A$.

Proposition 10
Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E. Alors

1. *$card(A) \leqslant card(E)$*
2. *$card(A) = card(E)$ ssi $A = E$*

Théorème 4
Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E.

1. *Si* $A \cap B = \varnothing$, *alors* $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$
2. $card(A \backslash B) = card(A) - card(A \cap B)$
3. $card(\overline{A}) = card(E) - card(A)$
4. $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$

Théorème 5 (Crible de Poincarre)

1. *Soit* $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *une famille de partie d'un ensemble finie* E. *Alors on a*

$$card(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} card(A_i) - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} card(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n} card(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + ..$$
$$+(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<..<i_k\leqslant n} card(A_{i_1} \cap .. \cap A_{i_k}) + .. + (-1)^n card(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_n)$$

2. *En particulier, si* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *si* $i \neq j$ $\forall i, j \in \{1, .., n\}$ $\qquad card(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} card(A_i)$

Exemple 18

Pour comprendre la formule du crible de Poincarré, nous allons l'expliciter pour $n = 3$

$card(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_{i=1}^{3} card(A_i) - card(A_1 \cap A_2) - card(A_1 \cap A_3) - card(A_2 \cap A_3) + card(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Proposition 11

1. *Si* E *et* F *sont deux ensembles finis alors* $E \times F$ *est un ensemble fini et* $card(E \times F) = card(E)card(F)$
2. *Plus généralement si* $E_1, .., E_n$ *sont des ensembles finis alors* $E_1 \times .. \times E_n$ *est un ensemble fini et*
$$card(E_1 \times .. \times E_n) = card(E_1)..card(E_n)$$
3. *En particulier, si* E *est un ensemble fini alors* E^n *est un ensemble fini et* $card(E^n) = (card(E))^n$

3 p-listes

3.1 p-listes générales

Définition 26

Soit E *un ensemble. On appelle* p*-liste d'un ensemble* E, *tout élément de* E^p *c'est-à-dire tout* p*-uplet de la forme* $(e_1, .., e_p)$ *où* $e_i \in E$ $\forall i \in \{1, .., p\}$.

Remarque 2

1. Les éléments ne sont pas nécessairement deux à deux distincts. Des éléments peuvent apparaitre plusieurs fois. Par exemple, $(8; 8; 8)$, $(1; 8; 5)$ et $(7; 5; 7)$ sont des 3-listes de $\mathbb{N}$
2. Dans une p-liste, l'ordre des éléments est important. Par exemple, la 2-liste $(5; 7)$ de $\mathbb{N}$ n'est pas la même que $(7; 5)$.

Proposition 12

Le nombre de p*-listes d'un ensemble* E *à* n *éléments est* n^p.

Cela découle tous simplement que les p-listes d'un ensemble E à n éléments forment l'ensemble $E^p et$ donc son cardinal est $(card(E))^p$.

3.2 Arrangements

Définition 27

Un p*-arrangement d'un ensemble* E *est une* p*-liste de* E *constituée d'éléments deux à deux distincts*

Exemple 19

$(1; 8; 5)$ est un 3-arrangement de $\mathbb{N}$. Par contre, $(8; 8; 8)$,et $(7; 5; 7)$ ne sont pas des 3-arrangements de $\mathbb{N}$.

Proposition 13

Soit E *un ensemble à* n *éléments. Si* A_n^p *désigne le nombre de* p*-arrangements de* E *alors*

$$A_n^p = n(n-1)..(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

3.3 Permutations

Définition 28
Soit E un ensemble à $\underline{n}$ éléments. On appelle permutation de E tout $\underline{n}$-arrangement de E.

Proposition 14
Soit E un ensemble à n éléments. Alors il y a $n!$ permutations de E.

4 Parties d'un ensemble

4.1 Combinaisons

Définition 29
Soit E un ensemble à n éléments. On appelle combinaison à p éléments de E toute partie de E à p éléments.

Exemple 20
Si $E = \{1; ..; 10\}$ alors $\{2; 5; 7\}$ et $\{1; 8; 10\}$ sont des combinaisons à 3 éléments de E.

Proposition 15
Soit E un ensemble à n éléments. Si C_n^p (ou encore $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$) désigne le nombre de combinaisons à p éléments de E alors

$$C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Proposition 16
$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \{0; ..; n\}$, on a

$C_n^p = C_n^{n-p}$ $\qquad C_n^0 = C_n^n = 1$ $\qquad C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ $\qquad C_n^p = \dfrac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$

Proposition 17
Triangle de Pascal.
Pour tous n et p deux nombres entiers positifs tels que $p \leqslant n$, on a

$$C_n^p + C_{n+1}^p = C_{n+1}^{p+1}.$$

On peut se souvenir de cette formule en utilisant le schéma suivant :

$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$\cdots$	p	$p+1$	$\ldots$	n	$n+1$
$n=0$	1											
$n=1$	1	1										
$n=2$	1	2	1									
$n=3$	1	3	3	1								
$n=4$	1	4	6	4	1							
$n=5$	1	5	10	10	5	1						
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$	$\ddots$					
n	1	n						$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n \\ p+1 \end{pmatrix}$		1	
$n+1$	1	$n+1$	$\ldots$					$\cdots$	$\begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix}$		$n+1$	1

Théorème 6
Formule du binôme de Newton.
Soient a, b deux nombres réels et n un entier. Alors on a $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

4.2 Dénombrement de $\mathcal{P}(E)$

Théorème 7
Si E est un ensemble à n éléments alors $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Preuve :
Notons E_k l'ensemble des parties de E à k éléments. Alors la famille $(E_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une partition de $\mathcal{P}(E)$ donc

$$card(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} card(E_k)$$

La proposition 15 montre que $card(E_k) = C_n^k$ donc $card(\mathcal{P}(E)) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$.

Or la formule du binôme montre que $2^n = (1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$ ■

Suites

1 Limites de suites.

1.1 Définitions.

Définition 30
On dit qu'une suite u converge vers $l \in \mathbb{R}$ ssi pour tout nombre $\varepsilon > 0$, la distance de u_n à l n'excède pas ε dès que n est assez grand. On traduit cette phrase mathématiquement par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_{0,} \, |u_n - l| < \varepsilon.$$

Le nombre l s'appelle la limite de la suite u et se note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

On dit qu'une suite diverge si elle ne converge pas. Dans ce cas la suite ne converge vers aucun nombre comme la suite $(-1)^n$, mais il se peut aussi que son terme général devienne de plus en plus grand sans tendre vers un nombre réel. Par exemple, la suite $3n - 5$ ou 2^n, ce qui nous amène à poser la définition suivante.

Définition 31
On dit qu'une suite u diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ssi pour tout nombre A, le terme u_n est supérieur (resp. inférieur) à A dès que n est assez grand. On traduit cette phrase mathématiquement par

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_{0,} u_n > A \text{ (resp. } < A).$$

Un abus courant de convention consiste à noter $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).lorsque la suite diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). Il existe une autre convention d'écriture des limites. Si la suite u tend vers $l \in \underline{[-\infty; +\infty]}$, on peut écrire encore $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} l$.

Exemple 21

- La suite $3 + \dfrac{1}{6^n}$ converge vers 6.
- La suite $-n^3 + n$ diverge vers $-\infty$.

Proposition 18

1. *Toute suite convergente est bornée.*
2. *Si la suite u tend vers $l \in \mathbb{R}$ alors $|u_n| \underset{n \to +\infty}{\to} |l|$*
3. *Si la suite u tend vers $l \in \mathbb{R}$ alors pour tout nombre entier p,*
   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+p} = l$*. En particulier,* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$

Proposition 19
Soit q un nombre réel. Alors la suite $(q^n)_{n \geqslant 0}$

1. *converge vers 0 ssi $|q| < 1$.*
2. *converge vers 1 ssi $q = 1$.*
3. *diverge vers $+\infty$ ssi $q > 1$*
4. *ne possède pas de limite ssi $q \leqslant -1$.*

2 Opérations sur les limites.

Nous allons énoncer les règles de calculs sur les limites par des tableaux. La notation F.I. signifie forme indterminée ce qui signifie qu'aucun théorème ne nous permet de conclure en général. Nous verrons par la suite des méthodes pour lever cette indétermination.

Addition

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$	$-\infty$	l	$+\infty$	$\longleftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.	
l'	$-\infty$	$l+l'$	$+\infty$	
$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	

$\uparrow$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Mulplication par un nombre
Si la suite u converge vers l et si λ est un nombre alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n)=\lambda\times l$.

Produit

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)$	$-\infty$	$l<0$	0	$l>0$	$+\infty$	$\longleftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$.	
$l'<0$	$+\infty$	$l\times l'$	0	$l\times l'$	$-\infty$	
0	F.I.	0	0	0	F.I.	
$l'>0$	$-\infty$	$l\times l'$	0	$l\times l'$	$+\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	

$\uparrow$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Inverse

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$-\infty$	$l\neq 0$	$l=0$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n}$	0	$\dfrac{1}{l}$	F.I.	0

Quotient

Nous n'avons pas besoin d'en établir le tableau. En effet, il suffit de remarquer que $\dfrac{u_n}{v_n}=u_n\times\dfrac{1}{v_n}$, d'utiliser le tableau de l'inverse pour la suite $(\dfrac{1}{v_n})_{n\geqslant 0}$ puis d'utiliser le tableau du produit.

Exemple 22
Déterminer la limite de la suite $\dfrac{2-\dfrac{5}{3^n}}{n^3}$.
$3^n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty \Longrightarrow \dfrac{1}{3^n}\underset{n\to+\infty}{\to} 0 \Longrightarrow \dfrac{5}{3^n}\underset{n\to+\infty}{\to} 0 \Longrightarrow 2-\dfrac{5}{3^n}\underset{n\to+\infty}{\to} 2$
$n^3 \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty \Longrightarrow \dfrac{1}{n^3}\underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$
par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{5}{3^n}}{n^3}=0$

3 Limites et inégalités.

Proposition 20
Si u est une suite positive et converge vers l alors $l\geqslant 0$.

Proposition 21
Soient u et v sont deux suites telles que $u_n\geqslant v_n$ $\forall n\geqslant 0$.

1. *Si les suites u et v convergent vers l et l' alors $l\geqslant l'$.*
2. *Si la suite v tend vers $+\infty$ alors u tend vers $+\infty$.*
3. *Si la suite u tend vers $-\infty$ alors v tend vers $-\infty$*

Remarque 3

- Le premier point de laproposition est absolument fausse si l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes. Par exemple,
$$1+\frac{1}{n}>1-\frac{1}{n}\quad\forall n\geqslant 1.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\dfrac{1}{n}=1=\lim\limits_{n\to+\infty}1-\dfrac{1}{n}$ et bien entendu $1\not> 1$!

- Pour le second point, si la suite u tend vers $+\infty$ cela n'implique absolument rien pour v. Par exemple $n \geqslant \frac{1}{n}$. La suite $(n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$ alors que celle de droite tend vers 0.

Théorème 8 (théorème d'encadrement)
Soient u, v, w trois suites telles que

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Supposons que les suites u et v convergent vers une même limite l. Alors la suite v converge vers l.

Proposition 22
Soient u une suite convergente et v une suite tendant vers 0. Alors la suite $(u_n v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

4 Outils de comparaisons

4.1 Equivalents et o

Définition 32
Soient u et v deux suites. On dit qu'au voisinage de l'infini

1. *u est négligeable devant v et on l'écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ ssi ($v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$)*
2. *u est équivalente à v et on l'écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ssi ($v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$).*

Proposition 23
Soitent u et v deux suites.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$$

Exemple 23
1. $n^4 + n + 3 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^6)$ car $\dfrac{n^4+n+3}{n^6} = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^5} + \dfrac{3}{n^6} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
2. $\dfrac{n^2+1}{n^5} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$ car $\dfrac{\frac{n^2+1}{n^5}}{\frac{1}{n^3}} = \dfrac{1}{n^2} + 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1$

Proposition 24
- *$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ ssi $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.*
- *Soit l un nombre non-nul. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l$ ssi $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$*
- *$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$*
- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$*
- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$*
- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n s_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n s_n$*
- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $s_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors $\dfrac{u_n}{s_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{s_n}$.*
- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$*
- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.*

Théorème 9
Deux suites équivalentes u et $v$sont de même nature, c'est-à-dire

- *u converge ssi v converge et dans ce cas elles ont la même limite.*

- *u diverge vers $+\infty$ ssi v diverge vers $+\infty$.*
- *u n'a pas de limite ssi v n'a pas de limite..*

Théorème 10
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et si

1. *la suite v tend vers 0 alors u tend vers 0*
2. *$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ alors $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$*

Proposition 25 (Table de références.)

- *$n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\beta)$ ssi $0<\alpha<\beta$*
- *$\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o(\dfrac{1}{n^\beta})$ ssi $0<\beta<\alpha$*
- *$(\ln n)^\alpha = \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\beta)\ \forall\alpha,\beta>0$.*
- *$n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$ si $|q|>1$ et $a>0$*
- *$q^n \underset{n\to+\infty}{=} o(\dfrac{1}{n^\alpha})$ si $|q|<1$ et $a>0$*
- *Un polynome en n est équivalent à son monome de plus haut degré.*

Exemple 24
$n^{2002} \underset{n\to+\infty}{=} o(2^n)$ et $7n^{13} - 50000n^{10} + 10^{10} \underset{n\to+\infty}{\sim} 7n^{13}$

4.2 Règles pour lever les indéterminations.

1. Formes indéterminées du type $+\infty - (+\infty)$
   Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$
2. Formes indéterminées du type $\dfrac{\infty}{\infty}$
   Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$ au numérateur et au dénominateur
3. Formes indéterminées du type $\dfrac{0}{0}$ (resp.$0\times\infty$)
   Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui décroit le plus vite en valeur absolue vers 0 au numérateur et au dénominateur (resp. on factorise dans le premier facteur le terme qui décroit le plus vite en valeur absolue vers 0 et dans le second facteur le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$

Exemple 25

1. $3^n - 10^n = -10^n(-(\dfrac{3}{10})^n + 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -10^n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$ donc
   $3^n - 10^n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$
2. $\dfrac{n^4-10n^3+2}{3n^4-1} = \dfrac{n^4(1-\dfrac{10}{n}+\dfrac{2}{n^4})}{3n^4(1-\dfrac{1}{3n^4})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^4}{3n^4} = \dfrac{1}{3}$ donc
   $\dfrac{n^4-10n^3+2}{3n^4-1} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{3}$.

5 Convergences de suites particulières.

Théorème 11

1. *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
2. *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Remarque 4
Si u est croissante et $u_n \leqslant 5 \ \forall n \geqslant 0$ alors u converge vers une limite l. Par contre, il est absolument interdit de penser (et de le dire !) que $l = 5$. Tout ce que l'on sait est que $l \leqslant 5$. Par la suite $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ est croissante et majorée par 5 mais sa limite est 2).
De même un minorant d'une suite décroissante n'est pas en général sa limite (essayez de trouvez un exemple).

Définition 33
On dit que deux suites u et v sont adjacentes ssi

1. *la suite est croissante*
2. *la suite v est décroissante*
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème 12
Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Théorème 13
La suite u converge vers l ssi (les suites $(u_{2n})_{n \geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geqslant 0}$ convergent et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = l$)

Espaces probabilisés

1 Notion d'application

Définition 34
Une application f est la donnée de deux ensembles A et B et d'une correspondance qui à tout élément x de A associe un élément de B qui est traditionnelement noté $f(x)$.
L'application f se note $f : \left\{ \begin{array}{c} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguité possible, $x \overset{f}{\mapsto} f(x)$.
L'ensemble A est appelé l'ensemble de départ de f et B est l'ensemble d'arrivée de f.
$f(x)$ se nomme l'image de f par x et si $b = f(a)$ on dit que a est un antécédent de b par f.

Définition 35
Soient une application $f : \left\{ \begin{array}{c} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$, X un sous-ensemble de A et Y un sous-ensemble de B.

- *$f(X) = \{f(x), \quad x \in X\}$ désigne l'ensemble image direct de X par f. Il s'agit de l'ensemble des images de tous les éléments de X par f.*
- *$f^{-1}(Y) = \{b \in B$ tel qu'il existe $a \in A$ avec $f(a) = b\}$ désigne l'image réciproque de Y par f. Il s'agit de l'ensemble des antécédents de tous les éléments de Y par f.*

Remarque 5
Toutes les fonctions numériques que vous connaissez sont des applications d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Mais ce ne sont pas les seules. Par exemple, lorsque vous jouez au loto, vous pouvez vous poser la question suivante ;
"Quelle est la probabilté d'obtenir six numéro gagnant,voire cinq etc." Pour cela, à chaque évènement "six numéros", "cinq numéros", etc. vous lui associer la probabilité correspondante. En fait, vous venez de défin r l'application P donnée par

$$P : \left\{ \begin{array}{ccc} \text{l'ensemble des évènements} & \to & [0;1] \\ \text{évènement} & \mapsto & \text{probabilté de l'évènement } \omega \end{array} \right.$$

qui n'est pas une fonction d'une variable réelle.

2 Mathématisation de la notion d'évènement

Définition 36
On appelle expérience (ou épreuve) aléatoire toute expérience dont le résultat est ne peut être déterminé à priori. Les résultats potentiels d'une expérience aléatoire sont appelés des évènements. Un évènement qui n'est jamais réalisé s'appelle évènement impossible et un évènement qui se réalise toujours est un évènement certain.

Exemple 26 (introductif)
Expérience Le lancer d'un dé cubique (à six face) dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et lecture du numéro de la face supérieure obtenue.
"obtenir un numéro pair" est un évènement, "obtenir un numéro pair et impair" est un évènement impossible et "obtenir un numéro pair ou impair" est un évènement certain.
Notons $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et ω le chiffre obtenu donc $\omega \in \Omega$. Par exemple, si l'événement est A_1 : "obtenir un numéro pair" est réalisé ssi $\omega \in \{2; 4; 6\}$. L'évènement A_2 : "obtenir un numéro supérieur ou égal à 4" est réalisé ssi $\omega \in \{4; 5; 6\}$.
Un évènement est certain ssi $\omega \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et un évènement est impossible ssi $\omega \in \varnothing$.
Nous remarquons que les évènements A_1 et A_2 sont réalisés simultanément ssi $\omega \in \{4; 6\} = \{2; 4; 6\} \cap \{4; 5; 6\}$.
Qu'en-est-il de l'évènement A_1 ou A_2 ? l'évènement A_1 est réalisé ou A_2 est réalisé ssi $\omega \in \{2; 4; 5; 6\} = \{2; 4; 6\} \cup \{4; 5; 6\}$
L'évènement A_1 est réalisé mais pas A_2 ssi $\omega \in \{2\} = \{2; 4; 6\} \backslash \{4; 5; 6\}$
L'évènement A_1 n'est pas réalisé ssi $\omega \in \{1; 3; 5\} = \Omega \backslash \{2; 4; 6\}$
Nous voyons sur cet exemple, que la mathématisation des évènements fait intervenir un ensemble Ω (celui des résultats possibles) ainsi que toutes ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$. Nous allons résumer cela dans la règle suivante.

Tous les évènements qui vont intervenir correspondent à une même expérience.

1. L'évènement A et B est réalisé est représenté par $A \cap B$

2. L'évènement A ou B est réalisé est représenté par $A \cup B$
3. L'évènement A est réalisé mais pas B est représenté par $A \backslash B$
4. Deux évènements sont dit incompatibles ssi $A \cap B = \varnothing$
5. La réalisation de l'évènement A implique la réalisation de l'évènement B se traduit par $A \subset B$

Cette dernière règle se comprend très bien comme suit :

$$\begin{array}{lll} (A \text{ est réalisé} & \Leftrightarrow & \omega \in A) \\ & \Downarrow & \\ (B \text{ est réalisé} & \Leftrightarrow & \omega \in A) \\ & \Updownarrow & \\ & A \subset B & \end{array}$$

3 Espace probabilisé fini

3.1 Cas général

Dans l'exemple 26, nous avons utilisé comme ensemble d'évènements l'ensemble des parties de Ω. En général, il ne sera pas toujours utile de travailler avec $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier mais avec seulement une partie particulière $\mathcal{A}$de $\mathcal{P}(\Omega)$. Un exemple typique est de travailler sous la condition qu'un évènement est déjà réalisé (par exemple, obtenir A_1 sachant B est réalisé) ce qui nous amène à la définition suivante. Bien entendu, il faudra toujours que si A et B sont deux parties de $\mathcal{A}$ alors $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \backslash B$ soient également des parties de $\mathcal{A}$.

Définition 37
Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu (ou σ-algèbre) de Ω ssi

1. *$\Omega \in \mathcal{A}$ ("l'évènement certain est possible")*
2. *$\forall A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$ ("si un évènement peut se réaliser, son contraire aussi")*
3. *$\forall A_1, .., A_k \in \mathcal{A}$, $A_1 \cup .. \cup A_k \in \mathcal{A}$ ("si deux évènements peuvent se réaliser alors l'un ou l'autre peut se réaliser").*

Dans ce cas, on dit que le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable.
Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés évènements.
Si en outre, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ les singletons $\{\omega\}$ $(\omega \in \Omega)$ sont appelés les évènements élémentaires.

Exemple 27
Si Ω est un ensemble fini alors $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω

Définition 38
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilté sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P de $\mathcal{A}$ dans $[0; 1]$ telle que

$$\begin{gathered} P(\Omega) = 1 \\ \text{et } \forall A, B \in \mathcal{A} \text{ tels que } A \cap B = \varnothing \\ \text{alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{gathered}$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilsé fini et $\forall A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ s'appelle la probabilité de A.
Un évènement $A \in \mathcal{A}$ est dit négligeable ssi $P(A) = 0$

Remarque 6
Il ne faut pas croire que $P(A) = 0 \Rightarrow A = \varnothing$. Nous verrons des contre-exemples en TD

Proposition 26
Soit $\mathcal{A}$ une tribu de Ω alors on a

1. *$\varnothing \in \mathcal{A}$*
2. *Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $A \cup B, A \cap B$ et $A \backslash B \in \mathcal{A}$*
3. *Si $\forall k \in \{1; ..; n\}$, $A_k \in \mathcal{A}$, alors $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$*

Proposition 27
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilsé fini et soient A, B deux évènements. Alors on a

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
4. *Si* $A \subset B$ *alors* $P(A) \leqslant P(B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Proposition 28 (Crible de Poincarré)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilsé fini et soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de partie d'un ensemble finie E. Alors on a

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) \\ &+ \sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}) + .. \\ &+(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<..<i_k\leqslant n} P(A_{i_1}\cap .. \cap A_{i_k}) + .. \\ &+(-1)^n P(A_1\cap A_2\cap .. \cap A_n) \end{aligned}$$

Théorème 14
1. *En particulier, si* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *si* $i \neq j$ $\forall i, j \in \{1, .., n\}$

$$P(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} P(A_i)$$

3.2 Cas particulier où $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

Le théorème suivant va nous montrer que la détermination d'une probabilité, il est nécessaire et suffisant de connaitre la probabilité de tous les évènements élémentaires.

Proposition 29
Soit un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ tel que $\Omega = \{\omega_1; ..; \omega_n\}$.

1. *Si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ alors on a* $\sum_{k=1}^{n} P(\{\omega_k\}) = 1$
2. *Soit $p_1, ., p_n.n$ nombres réels* <u>*positifs*</u> *tels que* $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$. *Alors il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ tel que*

$$\forall k \in \{1; ..; n\}\ P(\{\omega_k\}) = p_k$$

Dans ce cas, si $A = \{y_1; ..; y_s\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ *alors* $P(A) = \sum_{k=0}^{s} P(\{y_k\})$.

Définition 39
1. *On dit que deux évènements sont équiprobables ssi ils ont la même probabilité*
2. *Une probabiltité est dite uniforme ssi tous les évènements élémentaires sont équiprobables.*

Théorème 15
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilsé fini tel que la probabilité P soit uniforme. Alors on a

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\ P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Traditionnelement, on traduit cette formule par

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas où } A \text{ se réalise}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

4 Probabilités conditionnelles

Théorème 16
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé fini et* A *un évènement de probabilité non-nulle. Alors l'application* P_A *définie sur* $\mathcal{A}$ *par*

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \ \forall B \in \mathcal{A}$$

définie une probabilté sur $(\Omega, \mathcal{A})$*. On l'appelle probabibilté conditionnelle relativement à* A *ou probabilité sachant* A*.* $P_A(B)$ *est souvent notée* $P(B/A)$

Proposition 30

1. $P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A)$
2. *Si* $C \subset B$ *alors* $P(C/A) \leqslant P(B/A)$
3. $P((C \cup B)/A) = P(C/A) + P(B/A) - P((C \cap B)/A)$.
4. *La formule du crible de Poincarré reste vraie en remplaçant* P *par* P_A.

Proposition 31 (probabilités composées)
Soient $A_1, .., A_n$ *une famille d'évènements telle que*
$P(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1}) \neq 0$*. Alors on a*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)..P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1})$$

Définition 40
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace probabilisable fini et soit* $A_1, .., A_n$ *une famille de partie de* $\mathcal{A}$*. On dit que cette famille est un système complet d'évènements ssi*

1. $A_i \cap A_j = \varnothing$ *si* $i \neq j$
2. $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_n$

Théorème 17 (Formule des probabilités totales)
Soit $A_1, .., A_n$ *un système complet d'évènements et* B *un évènement, alors on a*

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)P(A_k)$$

Théorème 18 (Formule de Bayes)
Soit $A_1, .., A_n$ *un système complet d'évènements et* B *un évènement, alors* $\forall k \in \{1; ..; n\}$ *on a*

$$P(A_k/B) = \frac{P(B/A_k)}{P(B)}$$

5 Indépendances en probabilité

Définition 41
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé fini. On dit que deux évènements* A *et* B *sont indépendants pour la probabilité* P *ssi*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Proposition 32
Si A *et* B *sont indépendants pour la probabilité* P *alors* A *et* $\overline{B}$ *(resp.* $\overline{A}$ *et* B*, resp.* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$*) le sont aussi.*

Définition 42
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé fini et* $A_1, .., A_n$ n *évènements.*

1. *On dit que* $A_1, .., A_n$ *sont deux à deux indépendants pour la probabilité* P *ssi*

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \ \forall i \neq j \in \{1; ..; n\}$$

2. *On dit que $A_1, .., A_n$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité P ssi pour tout ensemble d'indice $I \subset \{1; ..; n\}$*

$$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Remarque 7
Par conséquent, si $A_1, .., A_n$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité P alors ils sont deux à deux indépendants pour la probabilité P

Proposition 33
$A_1, .., A_n$ n évènements mutuellement indépendants pour la probabilité P. Si l'on pose $\forall i \in \{1; ..; n\}$, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$ alors les évènements $B_1, .., B_n$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité P

Limites

Dans cette section, I désignera un intervalle I de la forme $]a;b[$, x_0 un élément de I et f une fonction définie sur I sauf, peut-être, en x_0.

1 définitions

Définition 43 (Limite en x_0)
Soit l un nombre réel. On dit que f possède l pour limite en x_0 si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l dès que x est suffisamment proche de x_0. On peut traduire ceci mathématiquement par

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } (\forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Le nombre l s'appelle la limite de f en x_0. On note alors $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ou $\lim\limits_{x_0} f = l$ voire encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\to} l$.

Exemple 28

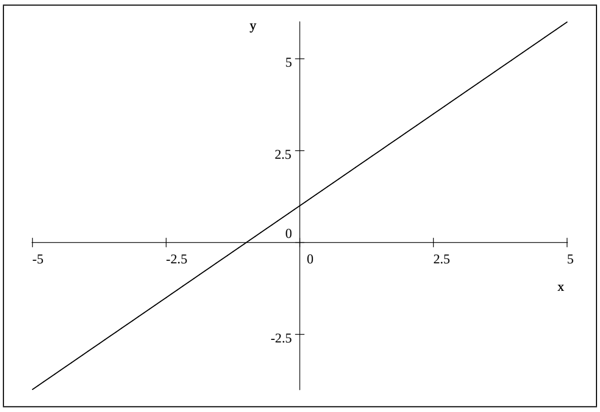
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 1$ et $x_0 = 1$. Alors quand x se rapproche de 1, $f(x)$ se rapproche de $f(1) = 3$. Nous allons le prouver avec la définition. Pour cela nous allons évaluer l'expression $|f(x) - 3|$

$$|f(x) - 3| = |4x - 1 - 3| = |4x - 4| = 4\,|x - 1|$$

   donc $|f(x) - 3| < \varepsilon$ dés que $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ donc $f(x) \underset{x \to 1}{\to} 3$

2. Par contre, il ne faut penser qu'en général que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Un exemple simple nous est fourni par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} x+1 & \text{si} & x \neq 0 \\ -2 & \text{si} & x = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{lcl} x+1 & \text{if} & x \neq 0 \\ -2 & \text{if} & x = 0 \end{array} \right.$$



   On constate que $f(x) \underset{x \to 0}{\to} -2 \neq f(0)$

Définition 44 (Limite infinie en x_0)
On dit que f possède $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite en x_0 si $f(x)$ est plus grand (resp. petit) que tout nombre donné dès que x est suffisamment proche de x_0. On peut traduire ceci mathématiquement par

$$\begin{array}{rcl} \forall A & \in & \mathbb{R} \text{ (resp. } \forall A \in \mathbb{R}),\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que} \\ (\forall x & \in & I \text{ et } |x - x_0| < \varepsilon) \Rightarrow f(x) \geqslant A \text{ (resp.} f(x) \leqslant B) \end{array}$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ voire encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\to} +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$ voire encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\to} -\infty$).

Définition 45 (Limite à gauche en x_0)
Pour les limites finies (resp. infinies), elle est la même que la définition 43 (resp. 44) en remplaçant l'intervalle $I =]a;b[$ par $]a;x_0[$

Définition 46 (Limite à droite en x_0)
Pour les limites finies (resp. infinies), elle est la même que la définition 43 (resp. 44) en remplaçant l'intervalle $I =]a; b[$ par $]x_0; b[$

Exemple 29
Si l'on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2 & \text{si} \quad x = -1 \\ 2x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

Alors son graphique "montre" que $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -4$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -2$. Nous allons le justifier rigoureusement.

$\boxed{\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)}$ Lorsque $x < -1$, $f(x) - (-4) = 3x - 1 + 4 = 3x + 3 = 3(x+1)$ donc $|f(x) - (-4)| < \varepsilon$ dès que $|x+1| = |x - (-1)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ et $x < -1$

$\boxed{\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)}$ Lorsque $x > -1$, $f(x) - (-2) = 2x + 4 = 2(x+1)$ donc $|f(x) - (-2)| < \varepsilon$ dès que $|x+1| = |x - (-1)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $x > -1$

2 Opérations sur les limites

Théorème 19
Soient f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0 et possédant une limite en x_0.

1. *Si $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in I \backslash \{x_0\}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant 0$.*
2. *Si $f(x) \geqslant g(x)$ $\forall x \in I \backslash \{x_0\}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.*

Théorème 20 (d'encadrement)
Soient f, g, h trois fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0.Supposons que l'on ait

$$\forall x \in I \backslash \{x_0\} \ f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.
Alors h possède une limite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$

Corollaire 2
Soit f une fonction bornée sur $I \backslash \{x_0\}$ et g une fonction telle que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$

Nous allons énoncer les règles de calculs sur les limites (qui seront valables pour les limites en x_0 ou à gauche ou à droite en x_0) par des tableaux. La notation F.I. signifie forme indterminée ce qui signifie qu'aucun théorème ne nous permet de conclure en général. Nous verrons par la suite des méthodes pour lever cette indétermination.

Addition

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$	$-\infty$	l	$+\infty$	$\longleftarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.	
l'	$-\infty$	$l + l'$	$+\infty$	
$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	

$\uparrow$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Mulplication par un nombre
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et si λ est un nombre alors $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \times l$.

Produit

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \times g(x))$	$-\infty$	$l < 0$	0	$l > 0$	$+\infty$	$\longleftarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$.	
$l' < 0$	$+\infty$	$l \times l'$	0	$l \times l'$	$-\infty$	
0	F.I.	0	0	0	F.I.	
$l' > 0$	$-\infty$	$l \times l'$	0	$l \times l'$	$+\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	

$\uparrow$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Inverse

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$-\infty$	$l\neq 0$	$l=0$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$	0	$\dfrac{1}{l}$	F.I.	0

Quotient

Nous n'avons pas besoin d'en établir le tableau. En effet, il suffit de remarquer que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}$, d'utiliser le tableau de l'inverse pour la fonction $\dfrac{1}{g(x)}$ puis d'utiliser le tableau du produit.

Proposition 34 (changement de variable)
Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ *et* $\lim\limits_{x\to y_0} g(x) = z_0$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = z_0$.

3 Limites classiques et applications

Proposition 35 (limites à connaitre)

1. *En* $+\infty$,
   - $x^\alpha e^{\beta x} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ *(resp.* 0*) si* α *est quelconque et* $\beta>0$ *(resp.* $\beta<0$*)*
   - $(\ln x)^\alpha e^{\beta x} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ *(resp.* 0*) si* α *est quelconque et* $\beta>0$ *(resp.* $\beta<0$*)*
   - $(\ln x)^\alpha x^{\beta} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ *(resp.* 0*) si* α *est quelconque et* $\beta>0$ *(resp.* $\beta<0$*)*
2. *En* $-\infty$, $x^n e^{\beta x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ *(resp.* $+\infty$*) si* n *est entier relatif quelconque et* $\beta>0$ *(resp.* $\beta<0$*)*
3. *En* 0
   - $(\ln x)^n\,|x|^\beta \underset{x\to 0}{\to} 0$ *(resp.* $+\infty$*) si* n *est entier relatif quelconque et* $\beta>0$ *(resp.* $\beta<0$*)*
   - $\dfrac{\sin x}{x}$ *(resp.* $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, *resp.* $\dfrac{e^x-1}{x}$*)* $\underset{x\to 0}{\to} 1$
   - $\dfrac{1-\cos x}{x^2} \underset{x\to 0}{\to} \dfrac{1}{2}$

1. Formes indéterminées du type $+\infty-(+\infty)$
   Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$
2. Formes indéterminées du type $\dfrac{\infty}{\infty}$
   Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$ au numérateur et au dénominateur
3. Formes indéterminées du type $\dfrac{0}{0}$ (resp.$0\times\infty$)
   Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui décroit le plus vite en valeur absolue vers 0 au numérateur et au dénominateur (resp. on factorise dans le premier facteur le terme qui décroit le plus vite en valeur absolue vers 0 et dans le second facteur le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$

4 Cas des fonctions monotones

Proposition 36
Soit f *une fonction définie sur* $]a;b[$.

1. *Si* f *est croissante et majorée sur* $]a;b[$ *alors* f *admet une limite en* b^-
2. *Si* f *est croissante et minorée sur* $]a;b[$ *alors* f *admet une limite en* a^+
3. *Si* f *est décroissante et majorée sur* $]a;b[$ *alors* f *admet une limite en* a^+
4. *Si* f *est décroissante et minorée sur* $]a;b[$ *alors* f *admet une limite en* b^-

Comparaison de fonctions

Dans la suite, on supposera que les fonction sont définies sur un intervalle T sauf peut-être en un point x_0 de I. Ce point x_0 pourra désigner également $+\infty$ ou $-\infty$.

1 Equivalence

Définition 47
Soient f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0. On dit qu'au voisinage de x_0, f est équivalente à g et on l'écrit $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ ssi

1. *($g(x) \neq 0$ dans un voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$).*
2. *ou de façon équivalente $f(x) = g(x)\theta(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \theta(x) = 1$*

Exemple 30

$$\frac{x^2+1}{x^5} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3} \text{ car } \frac{\frac{x^2+1}{x^5}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{x^2} + 1 \underset{x \to +\infty}{\to} 1$$

Proposition 37
équivalents

- *Soit l un nombre non-nul. Alors $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} l$ ssi $f(x) \underset{x \to x_0}{\to} l$*
- *$f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)$*
- *Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ alors $g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)$*
- *Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x)$*
- *Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ alors $f(x)h(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)h(x)$*
- *Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ et si $h(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 alors $\dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{x \to x_0}{\sim} \dfrac{g(x)}{h(x)}$*
- *Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ et $f(x) > 0$ au voisinage de x_0 alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(f(x))^\alpha \underset{x \to x_0}{\sim} (g(x))^\alpha$*
- *Si $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ alors $|f(x)| \underset{x \to x_0}{\sim} |g(x)|$.*

Proposition 38
Un polynome en x est équivalent en $\pm\infty$ à son monome de plus haut degré.

Exemple 31
$x^{2002} \underset{x \to +\infty}{=} o(2^x)$ et $7x^{13} - 50000x^{10} + 10^{10} \underset{x \to +\infty}{\sim} 7x^{13}$

Proposition 39 (changement de variable)
Soit f et g deux fonctions telles que

$$u(x) \underset{x \to x_0}{\to} y_0 \text{ et } f(x) \underset{x \to y_0}{\sim} g(x) \text{ alors } (f \circ u)(x) \underset{x \to x_0}{\sim} (g \circ u)(x)$$

Théorème 21
Deux fonctions équivalentes f et g sont de même nature, c'est-à-dire

- *f possède une limite en x_0 ssi g possède une limite en x_0 et dans ce cas elles ont la même limite.*
- *f n'a pas de limite en x_0 ssi g n'a pas de limite en x_0.*

2 Négligeabilité

Définition 48

1. *f est négligeable devant g et on l'écrit $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$ ssi*
   $g(x) \neq 0$ dans un voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
   On peut encore l'écrire $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
2. *$f(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x) + o(h(x))$ ssi $f(x) - g(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x))$*
   On peut encore l'écrire $f(x) = g(x) + h(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Proposition 40
Soitent f et g deux fonctions. Alors on a .

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) - g(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x)) \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x) + o(g(x))$$

Proposition 41
calcul des o *$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(1)$ ssi $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0$.*

- *Soit l un nombre non-nul. Alors $f(x) \underset{x\to x_0}{=} l + o(1)$ ssi $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} l$*
- *Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x))$ alors $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x))$*
- *Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$ et si $h(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 alors*
  $\dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to x_0}{=} o(\dfrac{g(x)}{h(x)})$
- *Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$ et $f(x) > 0$ au voisinage de x_0 alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$, $(f(x))^\alpha \underset{x\to x_0}{=} o((g(x))^\alpha)$*
- *Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x) + o(h(x))$ alors $f(x)k(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x)k(x) + o(h(x)k(x))$*
- *Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x)+\underline{o(h(x))}$ et $l(x) \underset{x\to x_0}{=} k(x)+\underline{o(h(x))}$ alors*
  $f(x) + l(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x) + k(x)+\underline{o(h(x))}$

Proposition 42 (changement de variable)
Soit f, g et h trois fonctions telles que

$$u(x) \underset{x\to x_0}{\to} y_0 \text{ et } f(x) \underset{x\to y_0}{=} g(x) + o(h(x))$$
$$\text{alors } (f \circ u)(x) \underset{x\to x_0}{=} (g \circ u)(x) + o((h \circ u)(x))$$

Théorème 22
Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$ et si

1. *g tend vers 0 alors f tend vers 0*
2. *$|f(x)| \underset{x\to x_0}{\to} +\infty$ alors $|g(x)| \underset{x\to x_0}{\to} +\infty$*

Proposition 43 (Table de références.)
Elle découle des limites vues dans le chapitre sur les limites

1. *En l'infini*

- $x^{\alpha} \underset{x\to\pm\infty}{=} o(x^{\beta})$ *ssi* $0<\alpha<\beta$ *et* $\frac{1}{x^{\alpha}} \underset{x\to\pm\infty}{=} o(\frac{1}{x^{\beta}})$ *ssi* $0<\beta<\alpha$
- $(\ln x)^{\alpha} = \underset{x\to+\infty}{=} o(x^{\beta})\ \forall\alpha,\beta>0.$
- $x^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\beta x})$ *si* $\beta>0$ *et quelque soit* α.

2. *En* 0

   (a) $(\ln x)^n \underset{x\to0^+}{=} o(x^{\beta})\ \forall\alpha,\beta>0.$

- $\sin x$ *(resp.*$\ln(1+x)$*)* $\underset{x\to0}{=} x+o(x)$
- $e^x \underset{x\to0}{=} 1+x+o(x)$
- $\cos x \underset{x\to0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

3 Développement limités

Définition 49
Soit n *un entier positif. On dit que* f *possède un développement limité d'ordre* n *en* x_0 *(*$DL_n(x_0)$*) ssi il existe un polynôme* P_n *de degré inférieur ou égal à* n *tel que*

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} P_n(x-x_0)+o((x-x_0)^n)$$

Proposition 44 (DL usuels)
Pour tout entier n*, les* $DL_n(0)$ *suivants sont vérifiés*

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to0}{=} (\sum_{k=0}^{n} x^k)+o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to0}{=} (\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k})+o(x^n)$$

$$\sin x \underset{x\to0}{=} (\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!})+o(x^{2n+1})$$

$$\cos x \underset{x\to0}{=} (\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!})+o(x^{2n})$$

$$e^x \underset{x\to0}{=} (\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!})+o(x^n)$$

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\ (1+x)^{\alpha} \underset{x\to0}{=} (\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-k+1)x^k}{k!})+o(x^n)$$

Exemple 32

- $\frac{1}{1-x} \underset{x\to0}{=} 1+x+x^2+o\left(x^2\right)$
- $\ln(1+x) \underset{x\to0}{=} x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$
- $\sin x \underset{x\to0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$
- $\cos x \underset{x\to0}{=} 1-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$
- $e^x \underset{x\to0}{=} 1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$

- $(1+x)^{\frac{1}{3}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o\left(x^2\right)$

Définition 50
Si P est un polynôme et n un entier alors T_nP désigne le polynôme P que l'on tronqué à l'ordre n c'est-à-dire on a éliminé tous les monômes de degré $> n$..

Exemple 33
Si $P(x) = x^5 - 7x^4 + 3x^3 - x + 1$ alors $(T_3P)(x) = 3x^3 - x + 1$

Proposition 45
Soit λ un nombre réel.

1. *Si f (resp. g) possède un $DL_n(x_0)$ alors λf, $f+g$, $f\times g$ possèdent également un $DL_n(x_0)$. Plus précisément, si*
$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$$
$$\text{et } g(x) \underset{x\to x_0}{=} Q_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$$
alors
$$\lambda f(x) \underset{x\to x_0}{=} \lambda P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$$
$$f(x)+g(x) \underset{x\to x_0}{=} P_n(x-x_0) + Q_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$$
$$f(x)\times g(x) \underset{x\to x_0}{=} [T_n(P_n\times Q_n)](x-x_0) + o((x-x_0)^n)$$
$$f(x)\times g(x) \underset{x\to x_0}{=} [T_n(P_n\times Q_n)](x-x_0) + o((x-x_0)^n)$$
2. *Si f (resp. g) possède un $DL_n(0)$ et si $f(0)=0$ alors $f\circ g$ possède un $DL_n(0)$ donné par*
$$(f\circ g)(x) \underset{x\to 0}{=} [T_n(P_n\circ Q_n)](x) + o(x^n)$$

Exemple 34

1. Calculer le $DL_4(0)$ de $x + \sin x$
On a $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$ donc
$$x + \sin x \underset{x\to 0}{=} 2x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$$
2. Calculer le $DL_3(0)$ de $\frac{\sin x}{1+x}$.
On a , $-x_{|x=0} = 0$ et $-x$ possède un $DL_3(0)$ donc
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o\left(x^3\right)$$
$$\text{Ainsi } \frac{\sin x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} [T_3(x - \frac{x^3}{6})(1 - x + x^2 - x^3)] + o\left(x^3\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} T_3[x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{6}x^6] + o\left(x^3\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$$

4 Applications des DL

4.1 Recherche d'équivalent

Proposition 46
Si f possède un $DL_n(x_0)$ alors f est équivalente en x_0 au monôme de plus bas degré de son DL

Exemple 35
Déterminer un équivalent de $\sin x - x$ en 0
$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^2\right)$ donc $\sin x - x \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$ d'où
$$\sin x - x\cos x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$

4.2 Calcul de limite

Pour déterminer la limite d'une fonction, il peut-être utile d'en faire un DL convenable puis d'en déduire un équivalent de la fonction

Exemple 36
Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{\sqrt[4]{1+x}-1}$.

- On a $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$ donc $\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$ et $\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}x^2$
- Comme $\sqrt[4]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{4}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{4}x + o\,(x)$, on obtient que $\sqrt[4]{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{4}x + o\,(x)$ d'où $\sqrt[4]{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{4}x$
- On en déduit que $\dfrac{\ln(1+x)-x}{\sqrt[4]{1+x}-1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{4}x} \underset{x\to 0}{\sim} -2x \underset{x\to 0}{\to} 0$.

  La limite cherchée est donc 0.

4.3 Recherche d'asymptote

Définition 51
Soit f une fonction définie sur I.

1. *Si $f(x) \underset{x\to x0}{\to} +\infty$ (resp. $-\infty$) , on dit que la droite $x = x_0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$*
2. *Si $f(x) - (ax+b) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ (resp. $\underset{x\to-\infty}{\to} 0$), on dit que la droite $y = ax+b$ est asymptote en $+\infty$ (resp. $-\infty$) à la courbe $\mathcal{C}_f$.*

Exemple 37
La fonction $x^2\ln(1+\frac{1}{x})$ possède-t-elle une asymptote et si oui, déterminer sa position par rapport à $\mathcal{C}_f$.
$\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$ donc d'après le théorème de compositions des o, on a

$$\begin{aligned} &\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &\text{d'où } x^2\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent $x^2\ln(1+\dfrac{1}{x}) - (x-\dfrac{1}{2}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3x}$ et $\dfrac{1}{3x} \geqslant 0$ au voisinage de $+\infty$.
On en déduit que la droite $y = x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ et elle est située au dessus de $\mathcal{C}_f$.

Variables et vecteurs aléatoires finies

1 Définitions

Définition 52
Une variable aléatoire réelle finie (var.finie) X sur un espace probabilsable fini $(\Omega, \mathcal{A})$ .est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ $\{\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in I\} \subset \mathcal{A}\}$
Traditionnellement on note

- $(X = x)$ *pour* $(X \in \{x\})$
- $(a < X \leqslant b)$ *pour* $(X \in]a; b])$
- $(X \leqslant x)$ *pour* $(X \in] - \infty; x])$

Définition 53
Un vecteur aléatoire fini X sur un espace probabilsable fini $(\Omega, \mathcal{A})$ .est une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$

$$X : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega \mapsto (X_1(\omega), .., X_n(\omega)) \end{cases}$$

telles que les n applications X_i soient var finies définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
On note $X = (X_1, .., X_n)$ et si $n = 2$, le vecteur (X_1, X_2) est appelé couple de vecteurs aléatoires

Proposition 47
Soient X, Y deux var finies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et λ un nombre réel.
Alors $X + Y$, λX, XY, $\sup(X, Y)$, $\min(X, Y)$ sont des var finies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Définition 54
Soit X une var finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On appelle fonction de répartition de X la fonction numérique réelle F_X définie par

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto P(X \leqslant x) \end{cases}$$

Proposition 48
Soit X une var finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et F_X sa fonction de répartition.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in [0; 1]$
2. *La fonction F_X est croissante.*
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

2 Loi d'une var finie

Définition 55
Soit X une var finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1; ..; x_n\}$. On appelle loi de probabilité de X (ou loi de X ou distribution de X) l'ensemble $\{(x_k, p_k),\ k \in \{1; ..; n\}\}$ où $p_k = P(X = x_k)$

Théorème 23
Un ensemble $\{(x_k, p_k),\ k \in \{1; ..; n\}\}$ définie une loi de probabilité ssi

1. $p_k \geqslant 0\ \forall k \in \{1; ..; n\}$
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$

La proposition suivante montre que la connaissance de la loi d'une var fournit sa fonction de répartition et que réciproquement la fonction derépartition permet de reconstituer la loi de la var.

Proposition 49
Soit X une var finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la loi de probabilité est $\{(x_k, p_k),\ k \in \{1; ..; n\}\}$ avec $x_1 < x_2 < .. < x_n$.

1. $\forall x \in]-\infty; x_1[,\ F_X(x) = 0$
   $\forall i \in \{1; ..; n-1\}$ *et* $\forall x \in [x_i; x_{i+1}[,\ F_X(x) = \sum\limits_{k=1}^{i} p_k$
   $\forall x \in [x_n; +\infty[\ F_X(x) = 1$
2. *Réciproquement,* $p_1 = F_X(x_1)$
   $\forall k \in \{2; ..; n\},\ p_k = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$

Définition 56
Soit X une var finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une fonction numérique d'une variable réelle. On note $f(X)$ l'application définie par

$$f(X) : \left\{ \begin{array}{c} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto f(X(\omega)) \end{array} \right.$$

Proposition 50
Soit X une var finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1; ..; x_n\}$, f une fonction numérique et $Y = f(X)$.
Y est une var finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que

1. $Y(\Omega) = \{f(x_1), .., f(x_n)\}$
2. *pour tout* $y \in Y(\Omega)$, $P(Y = y) = \sum\limits_{i \text{ tel que } f(x_i) = y} P(X = x_i)$

Proposition 51
Soit X, Y deux var finies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X(\Omega) = \{x_1; ..; x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; ..; y_m\}$.
Soit $Z = g(X, Y)$ une var dépendant uniquement de X et Y.
Alors $Z(\Omega) = \{g(x_k, y_l),\ k \in \{1; ..; n\}$ et $l \in \{1; ..; m\}\}$ et $\forall z \in \mathbb{R}$ on a

$$P(Z = z) = \sum_{k \text{ et } l \text{ tel que } g(x_k, y_l) = z} P((X = x_k) \cap (Y = y_l))$$

En particulier, si $Z = X + Y$

$$P(Z = z) = \sum_{k \text{ et } l \text{ tel que } x_k + y_l = z} P((X = x_k) \cap (Y = y_l))$$

et si $Z = XY$

$$P(Z = z) = \sum_{k \text{ et } l \text{ tel que } x_k y_l = z} P((X = x_k) \cap (Y = y_l))$$

Proposition 52
Soient $X_1, ..X_n$ n var finies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Posons $Y = X_1 + .. + X_n$ et $Z = X_1 \times .. \times X_n$ alors $\forall y, z \in \mathbb{R}$ on a

$$P(Y = y) = \sum_{x_1, .., x_n \text{ tel que } x_1 + .. + x_n = y} P(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_k))$$

$$P(Z = z) = \sum_{x_1, .., x_n \text{ tel que } x_1 \times .. \times x_n = z} P(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_k))$$

où x_1 (resp. x_2, .., resp. x_n) prend toutes les valeurs possibles de $X_1(\Omega)$ (resp. $X_2(\Omega)$, .., resp. $X_n(\Omega)$)

3 Moments d'une var finie

3.1 Espérance

Définition 57
Soit X une var finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\{(x_k, p_k),\ k \in \{1; ..; n\}\}$.
On appelle espérance mathématique (ou moyenne) de X le nombre noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

Proposition 53
Soit X une var finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\{(x_k, p_k),\ k \in \{1; ..; n\}\}$ et f une fonction numérique alors

$$E(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)p_k$$

Proposition 54 (linéarité de l'espérance)

1. *Soit X une var finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et a, b deux nombres réels alors on a*

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

2. *Soient $X_1, ..X_n$ n var finies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors on a la formule*

$$E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

Définition 58

1. *On dit que X est centrée si $E(X) = 0$*
2. *La variable $X - E(X)$ est appelée var centrée associée à X*

Proposition 55
Soient X, Y deux var finies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X(\Omega) = \{x_1; ..; x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; ..; y_m\}$. Soit $Z = g(X, Y)$ une var dépendant uniquement de X et Y. Alors on a

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} g(x_k, y_l)P((X = x_k) \cap (Y = y_l))$$

En particulier

$$E(XY) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} x_k y_l P((X = x_k) \cap (Y = y_l))$$

3.2 Covariance

Définition 59
Soit X une var finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On appelle

1. *moment d'ordre 2 de X le nombre $m_2(X) = E(X^2)$*
2. *variance de X le nombre $V(X) = E[(X - E(X^2))^2]$*
3. *écart-type de X le nombre $\sigma = \sqrt{V(X)}$*

Définition 60
Soit X, Y deux var finies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On a appelle covariance de X et Y lenpmbre

$$cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Proposition 56
Soient X, Y, Z trois var finies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et a, b deux nombres réels. Alors on a

1. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ *et* $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
2. $V(aX + b) = a^2V(X)$ *et* $\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$
3. $cov(aX + b, cY + d) = accov(X, Y)$
4. $cov(aX + bY, Z) = acov(X, Z) + bcov(Y, Z)$
5. $cov(X, aY + bZ) = acov(X, Y) + bcov(X, Z)$

Définition 61
Soit X une var finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. *On dit que X est réduite si $\sigma(X) = 1$*

2. *Si* $\sigma(X) \neq 0$ *alors la var* $\dfrac{X-\sigma(X)}{\sigma(X)}$ *est appellée var réduite associée à* X.

Proposition 57

1. *Soient* X, Y *deux var finies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *alors on a*

$$\begin{array}{rcl} V(X+Y) & = & V(X)+V(Y)+2cov(X,Y) \\ V(X-Y) & = & V(X)+V(Y)-2cov(X,Y) \end{array}$$

2. *Plus généralement, soient* $X_1, ..X_n$ n *var finies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Alors on a la formule*

$$V(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} cov(X_i, X_j)$$

Définition 62

Soit X, Y *deux var finies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *On a appelle coefficient de corrélation linéaire de* X *et* Y *le nombre*

$$\mu(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Proposition 58

1. $\mu(aX+b, cY+d) = \begin{cases} \mu(X,Y) \text{ si } ac>0 \\ -\mu(X,Y) \text{ si } ac<0 \end{cases}$

2. *On a toujours* $|\mu(X,Y)| \leqslant 1$

3. $|\mu(X,Y)| = 1$ *ssi il existe deux nombres réels* a *et* b *tel que*

$$P(Y = aX+b) = 1$$

($Y = aX+b$ *au sens du calcul des probabilité mais pas nécessairement au sens des applications)*

4 Loi d'un vecteur aléatoires finis

Définition 63

Soient (X, Y) *un couple de var finies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *telles que*

$$X(\Omega) = \{x_1; ..; x_n\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1; ..; y_m\}.$$

On appelle loi du couple (X, Y) *(ou loi de* (X, Y) *ou loi conjointe de* C *et* Y*) l'ensemble* $\{((x_k, y_l), p_{k,l}),\ k \in \{1; ..; n\}$ *et* $l \in \{1; ..; m\}\}$ *où*

$$p_{k,l} = P[(X = x_k) \cap (Y = y_l)].$$

Théorème 24

Un ensemble $\{((x_k, y_l), p_{k,l}),\ k \in \{1; ..; n\}$ *et* $l \in \{1; ..; m\}\}$ *définie une loi de probabilité ssi*

1. $p_{k,l} \geqslant 0$ $\forall k \in \{1; ..; n\}$ *et* $\forall l \in \{1; ..; m\}$

2. $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{m} p_{k,l} = 1$

Définition 64

Les variables X *et* Y *sont appellées variables marginales du couple* (X, Y).
La loi de la var X *(resp.* Y*) s'appelle la loi marginale de* X *(resp.* Y*) du couple* (X, Y).
Traditionnellement on note $P(X = x_k) = p_{k\bullet}$ *et* $P(Y = y_l) = p_{\bullet l}$

Proposition 59

1.

$$\forall k \in \{1; ..; n\}, p_{k\bullet} = \sum_{l=1}^{m} p_{k,l}.$$

ou encore

$$\forall k \in \{1; ..; n\} p(X = k) = \sum_{l=1}^{m} P[(X = x_k) \cap (Y = y_l)].$$

2.

$$\forall l \in \{1;..;m\},\ p_{\bullet l} = \sum_{k=1}^{n} p_{k,l}$$

ou encore

$$\forall l \in \{1;..;m\},\ p(Y = l) = \sum_{k=1}^{n} P[(X = x_k) \cap (Y = y_l)].$$

5 Lois conditionnelles

Définition 65
Soit X une var finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1; ..; x_n\}$ et A un évènement de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle.
La loi de probabilité de X conditionné par A (ou loi de X sachant A) est l'ensemble $\{(x_i, P((X = x_i)/A),\ i \in \{1; ..; n\}\}$

Définition 66
Soient (X, Y) un couple de var finies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que
$X(\Omega) = \{x_1; ..; x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; ..; y_m\}$.
On appelle loi de X conditionné par Y (ou loi de X sachant Y) l'ensemble $\{((x_k, y_l), P[(X = x_k)/(Y = y_l)]),\ k \in \{1; ..; n\}$ et $l \in \{1; ..; m\}\}$

6 Indépendances de n var

6.1 Cas $n = 2$

Définition 67
Soient X et Y deux var finies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X(\Omega) = \{x_1; ..; x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; ..; y_m\}$.
On dit que X et Y sont indépendantes ssi $\forall k \in \{1; ..; n\}$ et $\forall l \in \{1; ..; m\}$ on a

$$P((X = x_k) \cap (Y = y_l)) = P(X = x_k)P(Y = y_l)$$

Proposition 60
Soient X et Y deux var finies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et soient A, B deux intervalles de $\mathbb{R}$. Alors on a

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Proposition 61
Soient X et Y deux var finies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et soient f, g deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et sur $Y(\Omega)$. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux var définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes.

Proposition 62
Soient X et Y deux var finies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes alors

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

En particulier

$$cov(X, Y) = 0$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(X) + V(Y) \\ V(X-Y) &= V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

Plus généralement, si $X_1, ..X_n$ sont mutuellement indépendantes alors

$$V((\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$$

6.2 Cas général

Définition 68
Soient $X_1, ..X_n$ *n var finies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. *On dit que* $X_1, ..X_n$ *sont mutuellement indépendantes ssi* $\forall k \in \{1; ..; n\}$ *et* $\forall x_k \in X_k(\Omega)$

$$P(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k = x_k)) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$$

2. *On dit que* $X_1, ..X_n$ *sont deux à deux indépendantes ssi* $\forall k, l \in \{1; ..; n\}$, $\forall x_k \in X_k(\Omega)$ *et* $\forall x_l \in X_l(\Omega)$

$$P((X_k = x_k) \cap (Y_l = y_l)) = P(X_k = x_k)P(Y_l = y_l)$$

Proposition 63
Soient $X_1, ..X_n$ *n var finies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *mutuellement indépendantes et* p *un entier appartenant* $\{1; ..; n\}$.
Soit Y *une var ne dépendant que de* $X_1, .., X_p$ *et* Z *une var ne dépendant que de* $X_{p+1}, .., X_n$.
Alors les deux variables Y *et* Z *sont indépendantes.*

Continuité

I désigne un intervalle et x_0 un élément de I.

1 Définitions et propriétés algébriques

Soit f une fonction d'une variable réelle définie sur I.

Définition 69

1. *On dit que f est continue en x_0 ssi* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. *On dit que f est continue à gauche (resp. à droite) en x_0 ssi* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ *(resp.* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$*)*
3. *On dit que f est continue sur $]a;b[$ ssi elle est continue en tout point x_0 de $]a;b[$*
4. *.On dit que f est continue sur $[a;b]$ ssi elle est continue sur $]a;b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.*

Théorème 25
f est continue en x_0 ssi f est continue à droite et à gauche en x_0.

Théorème 26 (table de références)

1. *Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$*
2. *La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_{\times}^{+}$*
3. *Les fonctions $x \mapsto e^x$ (resp. $\cos x$, resp. $\sin x$) sont continues sur $\mathbb{R}$*
4. *Toute fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ si $\alpha \geqslant 0$ (resp. sur $\mathbb{R}_{\times}^{+}$ si $\alpha < 0$)*

Proposition 64 (règles de calculs algébriques)
Soient f, g deux fonctions continues en x_0 (resp. sur I) et λ un nombre réel. Alors

1. *$f + g, \lambda f$ et $f \times g$ sont continues en x_0 (resp. sur I)*
2. *Si en outre f ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en x_0 (resp. sur I)*

Proposition 65 (composition des fonctions continues)
Soient f une fonction continue en x_0 (resp. sur I) et g une fonction continue en $f(x_0)$ (resp. $J \supset f(I)$) alors $g \circ f$ est continue en x_0 (resp. sur I).

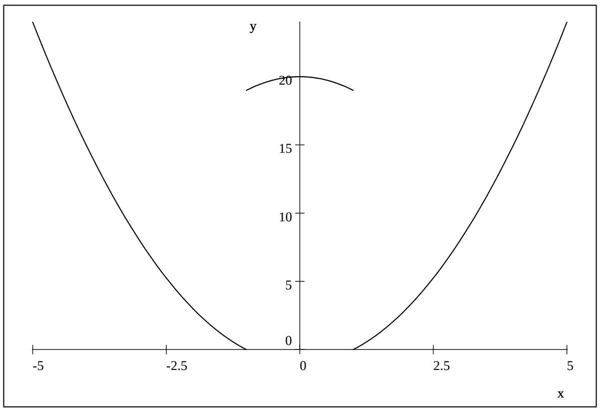
Exemple 38

1. La fonction $x \mapsto xe^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
2. Montrons que la fonction $x \overset{f}{\mapsto} \sqrt{3x-1}$ est continue sur $[1;5]$.

   On décompose f sous la forme $f = h \circ g$ avec $g(x) = 3x - 1$ et $h(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. La fonction g est continue sur $[1;5]$, $g([1;5]) = [2,14] \subset \mathbb{R}_+$ et h est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc f est continue sur $[1;5]$.

Définition 70
On dit qu'une fonction f est continue par morceau sur $[a;b]$ ssi f est continue sur $[a;b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points en lesquels elle possède des limites finies à gauche et droite (pas nécessairement égales)

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{if} \quad x < -1 \\ 20 - x^2 & \text{if} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{if} \quad 1 < x \end{cases}$$



2 Prolongement par continuité

Théorème 27 (de prolongement continu)
Soit f une fonction définie sur $I \backslash \{x_0\}$ et non définie en x_0. Supposons que f soit continue sur $I \backslash \{x_0\}$ et telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. Alors la fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \backslash \{x_0\} \\ l \text{ si } x = x_0 \end{cases}$$

est continue sur I. Elle s'appelle le prolongement par continuïté de f en x_0.

Exemple 39
La fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^{\times}$. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^{\times}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^{\times}$. $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ donc la fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ l \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 40
Par exemple, la fonction $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \in [0;1[\\ 10 \text{ si } x = 1 \\ x \text{ si } \ \in]1;5] \\ 2x+1 \text{ si } x \in]5;10] \end{cases}$ est continue par morceaux sur $[0;10]$. Par exemple, $f_{|]0;1[}(x) = -1$ est une fonction continue sur $]0;1[$ et elle se prolonge en $x \mapsto -1$ qui est une fonction continue sur $[0;1]$. Les autres cas se traitent de façon analogue.

3 Propriétés des fonctions continues

Proposition 66 (théorème des valeurs intermédiaires)
Si f est continue sur $[a;b]$ alors pour tout élément c de $[f(a);f(b)]$, il existe $d \in [a;b]$ tel que $f(d) = c$

Proposition 67

1. *Si f est continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle.*
2. *Si en outre I est un segment alors $f([a;b])$ est aussi un segment.*

Corollaire 3
Si f est continue sur un segment, alors f y possède un maximum et un minimum

Proposition 68
Si f est continue sur $[a;b]$ et est croissante (resp. décroissante) sur $]a;b[$ alors f est roissante (resp. décroissante) sur $[a;b]$

4 Bijections

Définition 71
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. *On dit que f réalise une bijection de I sur J ssi ($f(I) = J$ et tout élément de J possède un et un seul antécédent appartenant à I).*
2. *Si f réalise une bijection de I sur J, on note f^{-1} la fonction définie que J qui à un élément x de J associe son unique antécédent appartenant à I. On peut résumer cette phrase par cette formule très importe pour les calculs*

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \ \forall x \in J \text{ et } \forall y \in I$$

La fonction f^{-1} s'appelle la réciproque de f

Exemple 41
Nous allons montrer que la fonction $f(x) = 3x + 2$ réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $[2; 5]$

1. Le tableau de variation de f montre que $f([0; 1]) = [2; 5]$
2. Soit y un élément de $[2; 5]$. Déterminons si y possède un antécédent x appartenant à $[0; 1]$ puis si cet antécédent est unique. Pour cela considérons l'équation $y = f(x)$.

$$y = 3x + 2 \Leftrightarrow 3x = y - 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$$

Nous venons donc de montrer que y possède un unique antécédent. Le calcul suivant montre que cet antécédent appartient bien à $[0; 1]$.

$$2 \leqslant y \leqslant 5 \Leftrightarrow 0 \leqslant y - 2 \leqslant 3 \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{3}y - \frac{2}{3} \leqslant 1$$

Ainsi f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $[2; 5]$ et sa réciproque est définie sur $[2; 5]$ par

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$$

ou sous une forme plus traditionnelle

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

Proposition 69
Si f réalise une bijection de I sur J alors f^{-1} réalise une bijection de J sur I et sa réciproque est f ce que l'on peut traduire par

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Proposition 70
Si f réalise une bijection de I sur J et g réalise une bijection de J sur K alors $g \circ f$ réalise une bijection de I sur K et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Théorème 28 (de bijection continue)
Si f est continue et strictement monotone sur I, alors elle réalise une bijection de I sur $f(I)$. L'intervalle I est de même nature que I (c'est-à-dire ouvert, fermé ou semi-ouvert comme I) et ses bornes sont les limites de f aux bornes de I. En outre, sa réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$, strictement monotone et sa monotonie est celle de f.

Exemple 42
La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue et stritement croissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\ln(\mathbb{R}_+^\times)$. Pour déterminer $\ln(\mathbb{R}_+^\times)$, on calule $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et l'intervalle $\ln(\mathbb{R}_+^\times)$ est ouvert comme $\mathbb{R}_+^\times$ donc $\ln(\mathbb{R}_+^\times) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$. On note $x \mapsto e^x$ sa bijection réciproque. Elle est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^\times$!

Théorème 29
Si f est continue sur I et réalise une bijection de I sur $f(I)$ alors f est strictement monotone sur I.

Dérivabilité et fonctions de classe C^k

1 Généralités

Soit f une fonction définie sur I et x_0 un point de I.

Définition 72

1. *On dit que f est dérivable en x_0 ssi $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe. Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.*
2. *On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 ssi $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$) existe. Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée à droite (resp. à gauche) de f en x_0 et se note $f'(x_0^-)$ (resp. $f'(x_0^+)$).*
3. *On dit que f que est dérivable sur $]a;b[$ ssi f est dérivable en tout point x_0 appartenant à $]a;b[$.*
4. *On dit que f que est dérivable sur $[a;b]$ ssi f est dérivable en tout point x_0 appartenant à $]a;b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.*

Définition 73

1. *On dit que f est 2 fois dérivable sur I ssi (f est dérivable et f' est dérivable). Dans ce cas, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de la dérivée de f c'est-à-dire $f^{(2)} = f'' = (f')'$*
2. *On dit que f est 3 fois dérivable sur I ssi (f est dérivable, f' est dérivable et f'' est dérivable). Dans ce cas, on note $f^{(3)} = ((f')')'$*
3. *Plus généralement, soit k un entier positif, on dit que f est k fois dérivable ssi $\forall q \leqslant k-1$, $f^{(q)}$ est dérivable. Dans ce cas, on note $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$*

Définition 74 (fonctions de classe C^k)
Soit k un entier, on dit que f est de classe C^k sur I ssi (f est k fois dérivables et toutes les dérivées $f^{(q)}$ $(q \leqslant k)$ sont continues sur I.

Théorème 30 (table de référence)
Les fonctions suivantes f sont dérivables et de classe C^k sur $\mathcal{D}_{f'}$ pour tout entier k.

$\mathcal{D}_f$	$f(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}_+^\times$	x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^\times$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}_+^\times$	$\ln x$	$\mathbb{R}_+^\times$	$\dfrac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\}$	$\tan x$	$\mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2}+k,\pi\ k\in\mathbb{Z}\}$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Proposition 71
f est dérivable en $x_0 \in]a;b[$ ssi (f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$). Dans ce cas $f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$

Proposition 72
Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0

Par contre, si f est continue en x_0 cela n'implique pas que f est dérivable en x_0 (nous le verrons en TD)

Proposition 73
Si f est dérivable en x_0 et si x_0 est un extremum de f alors $f'(x_0) = 0$

La réciproque est fausse. Par exemple $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum de f.

2 Règles de calculs

Les deux propositions suivantes nous fournissent les règles de calculs sur les fonctions dérivables. Il est important pour les applications de remarquer que les deux propositions restent vraies si l'on remplace partout le terme "dérivable" par "de classe C^k"

Proposition 74 (règles de calculs algébriques)
Soient f, g deux fonctions dérivables en x_0 (resp. sur I) et λ un nombre réel. Alors

1. *$f+g, \lambda f$ et $f \times g$ sont dérivables en x_0 (resp. sur I) et*

$$\begin{aligned}(f+g)' &= f'+g' \\ (\lambda f)' &= \lambda f' \\ (f \times g)' &= f' \times g + f \times g'\end{aligned}$$

2. *Si en outre g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 (resp. sur I) et*

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

Proposition 75 (composition des fonctions continues)
Soient f une fonction dérivable en x_0 (resp. sur I) et g une fonction dérivable en $f(x_0)$ (resp. $J \supset f(I)$) alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 (resp. sur I) et

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Exemple 43
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
Elle s'écrit $f = \frac{g}{h}$ avec $g(x) = \sin x$ et $h(x) = x$. La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. La fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $h(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^\times$ donc la fonction $\frac{g}{h} = f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\times$.

3 Fonctions monotones

Proposition 76

1. *Soit f une fonction dérivable sur I. Alors f est constante sur I ssi $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$.*
2. *Soient f, g deux fonctions dérivables. Alors $f' = g'$ ssi $f - g$ est constante sur I;*

Proposition 77
Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $]a; b[$.

1. *f est croissante (resp. strictement croissante) sur I ssi $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) > 0$) $\forall x \in]a; b[$.*
2. *f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I ssi $f'(x) \leqslant 0$ (resp. $f'(x) < 0$) $\forall x \in]a; b[$.*

Proposition 78
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$ (c'est-à-dire que $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

1. *Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

2. *Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$ alors f^{-1} n'est dérivable pas en y_0 et sa courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ possède une tangente horizontale en y_0.*

Par conséquent, pour calculer la dérivée de la réciproque en un point, il faut déja commencer par rechercher son antédédent !

4 Prolongement

Proposition 79
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $[a;b[$ (resp. $]a;b]$)

1. *Si la limite $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$) est finie alors f est dérivable en b (resp. a) et $f'(b) = \lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$ (resp. $f'(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$)*

2. *Si la limite $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$) est infinie alors f n'est pas dérivable en b (resp. a) et $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$*
   (resp. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$)

Le théorème suivant sera très important dans les applications pour justifier qu'une fonction est de classe C^1 sur tout un intervalle lorsque les théorèmes généraux (addition, produit, quotient, composition) ne le permettent pas.

Théorème 31 (de prolongement continu de la dérivée)
Soit f une fonction continue sur I et de classe C^1 sur $I\backslash\{x_0\}$. Si f' possède une limite réelle l en x_0, alors f est de classe C^1 sur I et $f'(x_0) = l$ (en particulier f est dérivable en x_0)

Exemple 44
Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. On admet que f est continue sur $\mathbb{R}$ (cela a été prouvé dans le chapitre sur la continuité) et l'exemple 43 montre que f est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et $f'(x) = \dfrac{\cos x - x\sin x}{x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}^\times$. Nous allons effectué un $DL(0)$ pour déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{x(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(x-\frac{x^3}{6}o(x^3))}{x^2} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{3}x+o(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{3}x \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{1}{3}x \underset{x\to 0}{\to} 0$ donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$. Par conséquent, f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

5 Théorème des accroissement finis

Théorème 32 ((TAF))
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.

1. *Supposons qu'il existe deux réels m et M tels que*
$$\forall x \in]a;b[\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$$
   alors
$$m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$$

2. *Supposons qu'il existe un réel C tel que*
$$\forall x \in]a;b[\ \ |f'(x)| \leqslant C$$
   alors
$$|f(b)-f(a)| \leqslant C\,|b-a|$$

6 Convexité

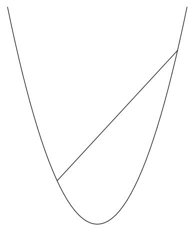
Définition 75

1. *On dit que f est convexe sur I ssi*

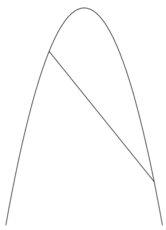
$$\forall a, b \in I \text{ et } t \in [0;1],\ f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$$

2. *On dit que f est concave sur I ssi $-f$ est convexe sur I.*

Géométriquement, une fonction est convexe (resp. concave) sur I ssi quelques soient les points M, N dont les abscisses appartiennent à I, le segment $[MN]$ est situé au dessus (resp. en dessous) du graphe de $\mathcal{C}_f$.



convexe



concave

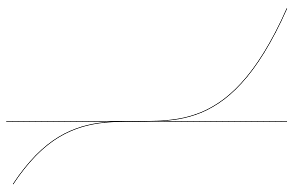
Proposition 80

1. *Supposons que f soit dérivable sur I. Alors f est convexe (resp. concave) ssi f' est croissante (resp. décroissante) sur I*

2. *Supposons que f soit de classe C^2 sur I. Alors Alors f est convexe (resp. concave) ssi f'' est positive (resp. négative) sur I*

Définition 76

On appelle point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ tout point où la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en ce point.



point d'inflexion

Proposition 81

Soit f une fonction de classe C^2 sur I. Si la dérivée seconde de f s'annule et change de signe en x_0 alors le point de $\mathcal{C}_f$ d'absisse x_0 est un point d'inflexion.

Lois discrètes finies

1 Loi uniforme

Définition 77
On dit qu'une var suit la loi uniforme sur $\{n; ..; m\}$ *ssi*

$$X(\Omega) = \{n; ..; m\}$$

et tous les évènements $P(X = k)$ $k \in \{n; ..; m\}$ *sont équiprobables*

2 Schéma de Bernouilli

Définition 78
Soit $p \in [0; 1]$*. On dit qu'une var finie* X *sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *suit le schéma de Bernouilli de paramètre* p *(noté* $X \sim \mathcal{B}(1, p)$*) ssi*

$$X(\Omega) = \{0; 1\} \text{ et } P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = 1 - p$$

Exemple 45 (caractéristique)
Soit E une épreuve aléatoire qui n'a comme aboutissement qu'un évèvement A avec une probabilité p ou que l'évènement contraire $\overline{A}$ avec la probabilité 1_p. Dans ce cas, si X est le nombre de fois où est réalisé A alors $X \sim \mathcal{B}(1, p)$

Proposition 82
Si $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ *alors*

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1 - p)$$

3 Loi binomiale

Définition 79
Soit n *un entier naturel et* $p \in [0; 1]$*. On dit qu'une var finie* X *sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *suit le schéma de Bernouilli de paramètre* p *(noté* $X \sim \mathcal{B}(n, p)$*) ssi*

$$X(\Omega) = \{0; ..; n\} \text{ et } P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \ \forall k \in \{0; ..; n\}$$

Exemple 46 (caractéristique)
Soit E une expérience aléatoire qui n'a comme aboutissement qu'un évèvement A avec une probabilité p ou que l'évènement contraire $\overline{A}$ avec la probabilité 1_p. Si on effectue n fois l'expérience E dans des conditions identiques (p est constant et les épreuves sont indépendantes) et si X est le nombre de fois où est réalisé A alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

Théorème 33
La somme de n *variables de Bernouilli mutuellement indépendantes de même espérance* p *suit la loi binômiale* $\mathcal{B}(n, p)$

Proposition 83
Si X *suit la loi binômiale* $\mathcal{B}(n, p)$ *alors*

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = np(1 - p)$$

Preuve :
Soit X_k la variable de Bernouilli qui compte le nombre de fois où est réalisé A à la $k^{ème}$ épreuve E alors $X_k \sim \mathcal{B}(1, p)$
Par hypothèse si $k \neq l$ alors X_k et X_l sont deux var indépendantes. La variable X s'écrit encore

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Par conséquent

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p = np$$

et la proposition 115 montre que

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p(1 - p) = np(1 - p)$$

■

Proposition 84

1. *Soient* X_1 *et* X_2 *deux var indépendantes qui suivent respectivement les lois de Bernouilli* $\mathcal{B}(n_1, p)$ *et* $\mathcal{B}(n_2, p)$ *alors* $X_1 + X_2$ *suit la loi de bernouilli* $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$

2. *Plus généralement si* $X_1, .., X_k$ *sont* k *var mutuellement indépendantes qui suivent respectivement les lois de Bernouilli* $\mathcal{B}(n_1, p), .., \mathcal{B}(n_k, p)$ *alors* $X_1 + .. + X_k$ *suit la loi de bernouilli* $\mathcal{B}(n_1 + .. + n_k, p)$

4 Loi hypergéométrique

Définition 80

Soient n *et* n *deux entiers tels que* $n \leqslant N$ *et* p *un réel appartenant à* $[0; 1]$ *tel que* Np *est un nombre entier.*
On dit qu'une var finie X *sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *suit la loi hypergéométrique de paramètre* N, n, p *(noté* $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$*) ssi*

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{\max(0, n - N + Np), \min(Np, n) \\ \text{et } P(X & = & k) = \dfrac{C_{Np}^{k} C_{N-Np}^{n-k}}{C_N^n} \ \forall k \in X(\Omega) \end{array}$$

Exemple 47 (caractéristique)

Soit E un ensemble constitué de deux types d'éléments : M sont de type 1 et $N - M$ sont de type 2. On effectue n tirage sans remise dans E (donc $n \leqslant N$). Alors X la var égale au nombre d'élément de type 1 piochés suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, \dfrac{M}{N})$. Ici $p = \dfrac{M}{N}$ donc $Np = M$ est bien un entier.

Proposition 85

Si X *suit la loi hypergéométrique* $\mathcal{H}(N, n, p)$ *alors*

$$E(X) = np$$

Séries

1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 81
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite. On appelle série de terme général* u_n *la suite* S *définie par* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *et on la note traditionnellement* $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Définition 82
On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge ssi la suite* $(S_n)_{n\geq 0}$ *converge dans* $\mathbb{R}$.
On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge ssi la suite* $(S_n)_{n\geq 0}$ *diverge.*

Définition 83
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série convergente. On note* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *la limite de la suite* S *et on l'appelle somme de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exemple 48
$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$. $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.
Donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}$.

Exemple 49
$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. On remarque pour commencer que
$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
D'où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \geq 2\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$,
ce qui montre que $S_n \geq 2(\sqrt{n+1}-1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Lemme 6
Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge alors pour tout entier positif* n_0 *la série* $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Lemme 7
Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge alors* $\mid u_n \mid \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *(ou encore* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*).*

On fera bien attention qu'il s'agit d'une condition nécessaire mais pas suffisante. Dans l'exemple 49 la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, bien que $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

application ⊗ Pour que la série $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge, il faut que $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ c'est-à-dire que $\mid q \mid < 1$.

⊗ Pour que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, il est nécessaire (mais pas suffisant) que $\alpha \leq 0$ (car sinon si $\alpha = 0$, $\frac{1}{n^\alpha} = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\rightarrow} 0$ et si $\alpha < 0$, $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$)

Proposition 86
Soient λ est un nombre réel et $\sum_{n\geq 0} u_n, \sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries convergentes alors

a) la série $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

b) la série $\sum_{n\geq 0}\lambda u_n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda u_n = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Définition 84
On dit la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente ssi série $\sum_{n\geq 0} \mid u_n \mid$ est convergente.

Proposition 87
Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

Exemple 50
$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3^n}$ est absolument convergente car $\sum_{n\geq 1} \mid \frac{(-1)^n}{3^n} \mid = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^n}$ qui est une série convergente. Donc on en déduit que la série $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3^n}$ est convergente.

2 Critères de convergence des séries à termes positifs.

Définition 85
On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à termes positifs ssi $\forall n \geq 0,\ u_n \geq 0$.

Proposition 88
Si $\forall n\geq 0,\ u_n \geq 0$ alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente ssi la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est bornée (rapellons que $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$).

Exemple 51
$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$. $\quad \forall n\geq 2, \quad \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2}$.

Donc $\forall n\geq 1, \quad S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$

On peut ainsi conclure que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente.

Proposition 89
Supposons $\forall n\geq 0,\ u_n\geq 0, v_n\geq 0$ et $u_n \leq v_n$. Alors
$\otimes$ (la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge) $\Rightarrow$ (la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge).
$\otimes$ (la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge) $\Rightarrow$ (la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge).

Proposition 90
Si $\forall n\geq 0,\ u_n\geq 0, v_n\geq 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Alors
$\otimes$ (la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge) $\Rightarrow$ (la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge).
$\otimes$ (la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge) $\Rightarrow$ (la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge).

Proposition 91
Si $\forall n \geq 0$, $u_n \geq 0, v_n \geq 0$ *et* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
$\otimes$ *la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge ssi la série* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *converge.*
$\otimes$ *la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *diverge ssi la série* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *diverge.*
On peut résumer cela par : les deux séries sont de même nature.

3 Séries de références.

Définition 86
La série $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ *s'appelle série géométrique de raison* q.

Proposition 92
La série $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ *(resp.* $\sum\limits_{n\geq 0} nq^n$*, resp.* $\sum\limits_{n\geq 0} n^2q^n$*) est convergente ssi* $\mid q \mid< 1$. *Dans ce cas*
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$, $\quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nq^n = \dfrac{q}{(1-q)^2}$, $\quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2q^n = \dfrac{q(q+1)}{(1-q)^3}$.

Preuve :
On traitera seulement le cas de la série $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$.
On sait que la suite $(q^n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 ssi $\mid q \mid< 1$. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ ne peut converger que si $\mid q \mid< 1$.
Supposons que $\mid q \mid< 1$. Alors $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Or $q^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ car $\mid q \mid< 1$. Donc la suite S converge vers $\dfrac{1}{1-q}$ ce qui prouve que la série converge et que sa somme est bien $\dfrac{1}{1-q}$. ∎

Définition 87
La série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ *s'appelle série associée à l'exponentielle.*

Proposition 93
Pour tout nombre réel x*, la série* $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ *est convergente*
et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$.

Définition 88
La série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{n^\alpha}$ *s'appelle série de Riemann de paramètre* α.

Proposition 94
La série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{n^\alpha}$ *converge ssi* $\alpha > 1$.

Corollaire 4
Soit u *une suite (non nécessairement positive) telle que*
$n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. *Alors la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *est absolument convergente. En particulier, elle est convergente.*

4 Plan d'étude d'une série

Etude de la convergence d'une série.

1. Le terme général tend-il vers 0 ? Si ce n'est pas le cas le lemme 7 permet de conclure.
2. S'il s'agit d'une suite de référence les théorèmes 92, 93, et 94 permettent de conclure.
3. Si ce n'est pas le cas, la série est-elle positive ? Si la réponse est oui,
   (a) on essaie d'appliquer l'un des théorèmes de comparaisons 89, 90, 91, ou le corollaire 4.
   (b) Si ces thèorèmes ne permettent pas de conclure, on eessae d'appliquer le théorème 88.
   (c) Si vous lisez ceci, alors seul le sujet peut vous sauvez.
4. Si la série est toujours négative, alors $\sum_{n\geq 0} -u_n$ est positive et on appliquera à la fin de l'étude la proposition 86
5. Si la série n'est pas de signe fixe, montrer l'absolue convergence de la série (car $\mid u_n \mid$ est toujours positif et on se ramène à 3) puis appliquer si c'est possible la proposition 87
6. Si la série n'est pas absolument convergente, alors seul le sujet peut encore vous sauvez.

Calcul de la somme d'une série convergente.

On applique la proposition 86 ou les théorèmes 92, 93.

Intégration sur un segment

1 Primitive

Définition 89
Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I ssi

$$F \text{ est dérivable sur } I \text{ et } F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$$

Théorème 34
Toute fonction continue sur un intervalle I possède au moins une primitive sur I.

1. *Si F est une primitive de f sur l'intervalle I alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.*

2. *Soient x_0 et y_0 deux nombres réels. Alors il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$*

Proposition 95
Soient F et G deux fonctions qui sont des primitives respectivement de f et de g. Soit λ un nombre réel.

1. *$F + G$ est une primitive de $f + g$*

2. *λF est une primitive de λf*

Proposition 96
Soient deux fonctions f, g telles que f est continue sur I et g dérivable sur I. Soit F une primitive de f sur I. Alors $F \circ g$ est une primitive de $(f \circ g) \times g'$

Cette dernière proposition combinée avec la table des dérivées usuelles nous fournit la table suivante

Proposition 97 (Primitives de référence)

fonctions	*primitives*	*fonctions*	*primitives*
$x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$f'f^\alpha$	$\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
e^x	$e^x + C$	$f'e^f$	$e^f + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + C$
$\cos x$	$\sin x + C$		
$\sin x$	$-\cos x + C$		
$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$		

2 Intégration sur un segment

2.1 *Cas des fonctions continues*

Définition 90
Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. On appelle intégrale de a à b de la fonction f le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f et on le note $\int_a^b f(t)dt$.
Par convention, $[F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$ et donc on a

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$$

Théorème 35
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$ alors la fonction

$$x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.
En outre, la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est C^1 sur I et

$$(\int_{x_0}^{x} f(t)dt)' = f(x)$$

Exemple 52
La fonction $x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc $\int_1^x \frac{dt}{t}$ est l'unique primitive de f qui s'annule en 1. On a la note ln. Par définition, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ qui est une fonction continue sur $]0;+\infty[$ donc ln est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$. C'est de cette façon que le français Napier à construit la fonction logarithme.
Montrons que
Soit $G(x) = \ln(ax)$ et $H(x) = \ln x$. Les fonctions G et H sont de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et leurs dérivées sont données par

$$G'(x) = \frac{(ax)'}{ax} = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$$
$$H'(x) = \frac{1}{x}$$

Donc $H'(x) = G'(x) \Leftrightarrow (H-G)'(x) = 0$ sur $]0;+\infty[$ donc $H-G$ est constante sur $]0;+\infty[$. Or $(H-G)(1) = \ln(a\times 1) - \ln(1) = \ln(a)$, ce qui montre que $H(x) = G(x) + \ln a$ sur $]0;+\infty[$ c'est-à-dire

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x \ \forall a, x > 0$$

2.2 Cas des fonctions continues par morceaux

Définition 91
Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ et soient
$a_0 = a < a_1 < .. < a_{n-1} < a_n = b$ ses points de discontinuités.
Par définition, on appelle intégrale de a à b le nombre réel défini par

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$$

Exemple 53
Soit f la fonction continue par morceaux sur $[0;5]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3 \\ 3x^2 & \text{si} \quad 3 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

Alors $\int_0^5 f(t)dt = \int_0^1 2tdt + \int_1^3 2dt + \int_3^5 3t^2dt = [t^2]_0^1 + [2t]_1^3 + [t^3]_3^5 = 103$

2.3 Propriétes générales de l'intégrale

Définition 92
On dit qu'une fonction est intégrable sur un segment $[\alpha;\beta]$ ssi f est continue ou continue par morceaux sur $[a;b]$.

Proposition 98 (Relation de Chasles)
Soit f une fonction intégrable sur un segment $[\alpha;\beta]$ et soit a, b, c trois éléments de $[\alpha;\beta]$ alors on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Par conséquent $\int_a^a f(t)dt = 0$ et $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

Proposition 99 (Linéarité de l'intégrale)
Soient f et g deux fonctions intégrables sur un segment $[\alpha;\beta]$ et soit a, b trois éléments de $[\alpha;\beta]$ alors on a

$$\int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b g(t)dt$$

Soit f une fonction intégrable sur un segment $[\alpha;\beta]$ et soit a, b, c trois éléments de $[\alpha;\beta]$ alors on a

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

Proposition 100 (Inégalité et intégrale)
Soient f et g deux fonctions intégrables sur un segment $[\alpha;\beta]$ et soit a, b trois éléments de $[\alpha;\beta]$ tel que $b \leqslant a$

1. *Si* $f(t) \geqslant 0 \ \forall t \in [a;b]$ *alors* $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$
2. *Si* $f(t) \geqslant 0 \ \forall t \in [a;b]$ *et* $\int_a^b f(t)dt = 0$ *alors* $f(t) = 0 \ \forall t \in [a;b]$
3. *Si* $f(t) \geqslant g(t) \ \forall t \in [a;b]$ *alors* $\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt$
4. *Inégalité triangulaire* $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$
5. *Inégalité de la moyenne*
   S'il existe deux nombres réels m et M tels que
   $$m \leqslant f(t) \leqslant M \ \forall t \in [a;b]$$
   alors
   $$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$$

Définition 93
Soit f une fonction intégrable sur un segment $[a;b]$ $(a \neq b)$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

3 Calcul intégral

3.1 Méthode directe

Pour calculer une intégrale $\int_a^b f(t)dt$, il suffit de calculer une primitive de f en utilisant les tables de référence et les théorème de la section 1.

3.2 Intégration par partie

Théorème 36
Soient u et v deux fonctions C^1 sur $[a;b]$ alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

3.3 Changement de variable

Théorème 37
Soient f une fonction intégrable sur $[a;b]$ et u une fonction C^1 sur $[a;b]$ telle que $u([\alpha;\beta]) \subset [a;b]$ alors on a

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)dt$$

Proposition 101

1. *Soit f une fonction intégrable sur $[-a;a]$.*
   - *Si f est paire sur $[-a;a]$ alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{b} f(t)dt$*
   - *Si f est impaire sur $[-a;a]$ alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$*
2. *Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et est périodique de période T alors*

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$$

4 Somme de Riemann

4.1 Convergence des sommes de Riemann

Définition 94
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et n un nombre entier strictement positif. On appelle $n^{\text{ème}}$ somme de Riemann de f sur $[a;b]$ le nombre réel défini par

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

Théorème 38
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ alors la suite $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

4.2 Applications à la convergence de certaines suites

Exemple 54
Soit $u_n = \frac{1}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1} k^3$. Alors $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{k}{n})^3 = \frac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(0 + 1 \times \frac{k}{n})^3$.
Ainsi u_n est la $n^{\text{ème}}$ somme de Riemann de la fonction f continue sur $[0;1]$ et définie par

$$f(x) = x^3$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_{0}^{1} x^3 dx = \frac{1}{4}$

4.3 Calculs numériques d'aires

Si f est une fonction continue sur $[a;b]$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_{a}^{b} f(t)dt$, on peut dire que si n est assez grand,

$$S_n(f) \simeq \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

Question : quelle valeur donner à n pour avoir un valeur approchée à ε près de $\int\limits_a^b f(t)dt$? Le théorème suivant nous donne une réponse lorsque f est C^1 sur $[a;b]$.

Théorème 39
Soit f est une fonction de classe C^1 sur $[a;b]$. Si on pose $M(f) = \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$ alors pour tout entier n, on a

$$\left|\int\limits_a^b f(t)dt - S_n(f)\right| \leqslant \frac{M(f)(b-a)^2}{2n}$$

Application. Déterminer la valeur approchée à 10^{-2} près de $\int\limits_1^2 \frac{dt}{t}$

Ici $[a;b] = [1;2]$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $M(f) = 1$. Donc le théorème précédent montre que

$$\left|\int\limits_a^b f(t)dt - S_n(f)\right| \leqslant \frac{1}{2n}$$

Il faut donc que

$$\left|\int\limits_1^2 \frac{dt}{t} - S_n(\frac{1}{t})\right| \leqslant 10^{-2}$$

Il est suffisant alors que $\dfrac{1}{2n} \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow n \geqslant 500$

En TD d'informatique, nous calculerons S_{500} et nous obtiendrons $S_{500}(f) = \dfrac{1}{500}\sum\limits_{k=0}^{499} \dfrac{500}{500+k} = 0.693\,65$. Donc

$$0.693\,65 - 10^{-3} \leqslant \int\limits_1^2 \frac{dt}{t} \leqslant 0.693\,65 + 10^{-3}$$

Or $\int\limits_1^2 \dfrac{dt}{t} = \ln 2$ donc $\ln 2 = 0.693 \pm 10^{-3}$ donc les deux premières décimales sont exactes

Espace probabilisé et var discrète infinie

1 Espace probabilsé

1.1 Espace probabilisable

Définition 95
Soit Ω un ensemble (non-nécessairement fini) et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu (ou σ-algèbre) de Ω ssi

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\forall A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$
3. *Pour toutes famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$, alors* $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Dans ce cas, on dit que le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable.
Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés évènements.
Si en outre, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ les singletons $\{\omega\}$ $(\omega \in \Omega)$ sont appelés les évènements élémentaires.

Proposition 102
Soit $\mathcal{A}$ une tribu de Ω alors on a

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. *Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $A \cup B, A \cap B$ et $A \backslash B \in \mathcal{A}$*
3. *Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$, alors $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$*

Définition 96
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Soit I un ensemble fini d'entiers ou $I = \mathbb{N}$ et soit $(A_n)_{n\in I}$ une famille de partie de $\mathcal{A}$. On dit que cette famille est un système complet d'évènements ssi

1. *$A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$*
2. $\Omega = \bigcup\limits_{n\in I} A_n$

1.2 Espace probabilisé

Définition 97
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilté sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P de $\mathcal{A}$ dans $[0; 1]$ telle que

1. $P(\Omega) = 1$
2. *Pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de partie de $\mathcal{A}$ telle que*
$$A_i \cap A_j = \varnothing \text{ si } i \neq j$$
alors
$$P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$
Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilsé fini et $\forall A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ s'appelle la probabilité de A.
Un évènement $A \in \mathcal{A}$ est dit négligeable ssi $P(A) = 0$
Une propriété $\mathcal{P}$ est dite presque surement vraie ssi l'ensemble $A_{\mathcal{P}} = \{\omega \in \Omega \text{ tel } \omega \text{ vérifie } \mathcal{P}\}$ a une probabilité égale à 1.

Proposition 103
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilsé et soient A, B deux évènements. Alors on a

1. *$P(\varnothing) = 0*$*
2. *Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$*
3. *Plus généralement, si $A_1, .., A_n$ sont n évènements deux à deux imcompatibles alors*
$$P(\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} P(A_i)$$
4. *$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$*
5. *$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$*
6. *Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$*
7. *$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.*
8. *La formule du crible rest valable*

Proposition 104
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilsé

1. *Soient I un ensemble fini d'entiers ou $I = \mathbb{N}$ et $(A_n)_{n \in I}$ un système complet d'évènements alors on a*
$$\sum_{n \in I} P(A_n) = 1$$
2. *Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements de $\mathcal{A}$ (i.e. $A_n \subset A_{n+1}$), la suite $P(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et*
$$P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$
3. *Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements de $\mathcal{A}$ (i.e. $A_{n+1} \subset A_n$), la suite $P(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et*
$$P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$

1.3 Analogie et différence entre le cas général et le cas fini

Dans le chapitre sur les espaces probailisés finis, toute la partie sur les probabilités conditionnelles et l'indépendance reste vraie.Dans le cas général, nous avons en plus droit aux théorèmes suivants

Théorème 40
Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'évènements de Ω et si B est un évènement, alors on a
$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B/A_n)P(A_n)$$

Définition 98
Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements.
On dit que les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellements indépendants si pour tout ensemble fini d'entier I
$$P(\bigcap_{n \in I} A_n) = \prod_{n \in I} P(A_n)$$

Proposition 105
Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants. Si l'on pose $\forall i \in \mathbb{N}, B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$ alors la suite d'évènementsts $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sune suite d'évènements mutuellement indépendants.

2 Variables et vecteurs aléatoires discrets dénombrable

2.1 Définitons

Définition 99
Une variable aléatoire réelle discrète infinie (var distrète infinie) X sur un espace probabilsable $(\Omega, \mathcal{A})$ .est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que

1. *pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ $\{\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in I\} \subset \mathcal{A}\}$*
2. *Il existe une suite de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $X(\Omega) = \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$*

Définition 100
Un vecteur aléatoire réel discret infini X sur un espace probabilsable $(\Omega, \mathcal{A})$ .est une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$

$$X : \left\{ \begin{array}{c} \Omega \to \mathbb{R}^n \\ \omega \mapsto (X_1(\omega), .., X_n(\omega)) \end{array} \right.$$

telles que les n applications X_i soient var discrètes infinies définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
On note $X = (X_1, .., X_n)$ et si $n = 2$, le vecteur (X_1, X_2) est appelé couple de vecteurs aléatoires

Proposition 106
Soient X, Y deux var discrètes infinies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et λ un nombre réel.
Alors $X + Y$, λX, XY, $\sup(X, Y)$, $\min(X, Y)$ sont des var finies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

2.2 Loi d'une var discrète infinie

Définition 101
Soit X une var discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. On appelle loi de probabilité de X (ou loi de X ou distribution de X) l'ensemble $\{(x_n, p_n),\, n \in \mathbb{N}\}$ où $p_n = P(X = x_n)$

Théorème 41
Un ensemble $\{(x_n, p_n),\, n \in \mathbb{N}\}$ définie une loi de probabilité ssi

1. $p_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$
2. *la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$*

3 Moments d'une var discrète infinie

3.1 Espérance

Définition 102
Soit X une var discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\{(x_n, p_n),\, n \in \mathbb{N}\}$.
On dit X possède une espérance ssi la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n p_n$ converge.
Dans ce cas, on appelle espérance mathématique (ou moyenne) de X le nombre noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n p_n$$

Proposition 107 (linéarité de l'espérance)

1. *Soit X une var discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant une espérance et a, b deux nombres réels.*
Alors la var discrète infinie $aX + b$ possède une espérance et

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

2. *Soient $X_1, ..X_n$ n var discrètes infinies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant une espérance.*
Alors la var discrète infinie $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ possède une espérance et

$$E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

Définition 103

1. *On dit que X est centrée si $E(X) = 0$*

2. *La variable $X - E(X)$ est appelée var centrée associée à X*

3.2 Covariance

Définition 104
Soit X une var discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On dit que X possède une variance ssi $(X - E(X))^2$ possède une espérance.

Proposition 108
Soit X une var discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Alors X possède une variance ssi X et X^2 possède une espérance.

Définition 105
Soit X une var discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant une variance. On appelle

1. *moment d'ordre 2 de X le nombre $m_2(X) = E(X^2)$*

2. *variance de X le nombre $V(X) = E[(X - E(X)^2)]$*

3. *écart-type de X le nombre $\sigma = \sqrt{V(X)}$*

Proposition 109
Soit X, Y deux var discrètes infinies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant une variance.
Alors la car $(X - E(X))(Y - E(Y)$ posséde une espérance. Dans ce cas, on appelle covariance de X et Y lenpmbre

$$cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Proposition 110
Soient X, Y, Z trois var discrètes infinies $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant une variance et a, b deux nombres réels. Alors on a

1. *$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$*

2. *$V(aX + b) = a^2V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$*

3. *$cov(aX + b, cY + d) = accov(X, Y)$*

4. *$cov(aX + bY, Z) = acov(X, Z) + bcov(Y, Z)$*

5. *$cov(X, aY + bZ) = acov(X, Y) + bcov(X, Z)$*

Définition 106
Soit X une var finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. *On dit que X est réduite si $\sigma(X) = 1$*

2. *Si $\sigma(X) \neq 0$ alors la var $\dfrac{X - \sigma(X)}{\sigma(X)}$ est appellée var réduite associée à X.*

Proposition 111

1. *Soient X, Y deux var discrètes infinies $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant une variance.*
   Alors $X + Y$ et $X - Y$ possède une variance et on a

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y) \\ V(X - Y) &= V(X) + V(Y) - 2cov(X, Y) \end{aligned}$$

2. *Plus généralement, soient $X_1, ..X_n$ n var discrètes infinies $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant une variance.*
   Alors $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ possédant une variance et on a la formule

$$V(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(X_i, X_j)$$

Définition 107
Soit X, Y deux var discrètes infinies $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant une variance. On a appelle coefficient de corrélation linéaire de X et Y le nombre

$$\mu(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Proposition 112

1. $\mu(aX+b, cY+d) = \begin{cases} \mu(X,Y) \text{ si } ac > 0 \\ -\mu(X,Y) \text{ si } ac < 0 \end{cases}$
2. *On a toujours* $|\mu(X,Y)| \leqslant 1$
3. $|\mu(X,Y)| = 1$ *ssi il existe deux nombres réels a et b tel que*

$$P(Y = aX + b) = 1$$

($Y = aX + b$ au sens du calcul des probabilité mais pas nécessairement au sens des applications)

4 Loi d'un vecteur aléatoires discrets infinis

Définition 108
Soient (X,Y) un couple de var discrètes infinies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

On appelle loi du couple (X,Y) (ou loi de (X,Y) ou loi conjointe de C et Y) l'ensemble $\{((x_n, y_m), p_{n,m}),\ n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{N}\}$ où

$$p_{n,m} = P[(X = x_n) \cap (Y = y_m)].$$

Théorème 42
Un ensemble $\{((x_n, y_m), p_{n,m}),\ n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{N}\}$ définie une loi de probabilité ssi

1. $p_{n,m} \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ *et* $\forall m \in \mathbb{N}$
2. *($\forall m \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_{n,m}$ puis, si on pose $d_m = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_{n,m}$, la série $\sum\limits_{m \geqslant 0} d_m$converge et $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} d_m = 1$.)*
   ou encore de façon équivalente
   ($\forall n \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{m \geqslant 0} p_{n,m}$ puis, si on pose $d_n = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} p_{n,m}$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} d_m$converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} d_m = 1$.)

Définition 109
Les variables X et Y sont appellées variables marginales du couple (X,Y).
La loi de la var X (resp. Y) s'appelle la loi marginale de X (resp. Y) du couple (X,Y).
Traditionnellement on note $P(X = x_n) = p_{n\bullet}$ et $P(Y = y_m) = p_{\bullet m}$

Proposition 113

1. $\forall k \in \mathbb{N},\ p_{n\bullet} = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} p_{n,m}$
2. $\forall l \in \mathbb{N}\ p_{\bullet m} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_{n,m}$

5 Lois conditionnelles

Définition 110
Soit X une var discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et A un évènement de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle.
La loi de probabilité de X conditionné par A (ou loi de X sachant A) est l'ensemble $\{(x_n, P((X = x_n)/A),\ n \in \mathbb{N}\}$

Définition 111
Soient (X,Y) un couple de var discrètes infinies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que
$X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_n, n \in \mathbb{N}\}$.
On appelle loi de X conditionné par Y (ou loi de X sachant Y) l'ensemble $\{((x_n, y_m), P[(X = x_n)/(Y = y_m)]),\ n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}\}$

6 Indépendances de n var

6.1 Cas $n = 2$

Définition 112
Soient X et Y deux var discrètes infinies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_n, n \in \mathbb{N}\}$.
On dit que X et Y sont indépendantes ssi $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall m \in \mathbb{N}$ on a

$$P((X = x_n) \cap (Y = y_m)) = P(X = x_n)P(Y = y_m)$$

Proposition 114
Soient X et Y deux var discrètes infinies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et soient A, B deux intervalles de $\mathbb{R}$. Alors on a

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Proposition 115
Soient X et Y deux var discrètes infinies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes possédant une variance alors

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

En particulier

$$cov(X, Y) = 0$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(X) + V(Y) \\ V(X-Y) &= V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

Plus généralement, si $X_1, ..X_n$ sont mutuellement indépendantes possédants une variance alors

$$V((\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$$

6.2 Cas général

Définition 113
Soient $X_1, ..X_n$ n var discrètes infinies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. *On dit que $X_1, ..X_n$ sont mutuellement indépendantes ssi $\forall k \in \{1; ..; n\}$ et $\forall x_k \in X_k(\Omega)$*

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_k)) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$$

2. *On dit que $X_1, ..X_n$ sont deux à deux indépendantes ssi $\forall k, l \in \{1; ..; n\}$, $\forall x_k \in X_k(\Omega)$ et $\forall x_l \in X_l(\Omega)$*

7 Lois discrètes infinies

7.1 Loi géométrique

Définition 114
Soit $p \in]0; 1[$. On dit qu'une var X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ (noté $X \sim \mathcal{G}(p)$) ssi

1. *$X(\Omega) = \mathbb{N}^{\times}$*
2. *$P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$*

Exemple 55 (caractéristique)
Soit E une expérience aléatoire qui n'a comme aboutissement qu'un évèvement A avec une probabilité p ou que l'évènement contraire $\overline{A}$ avec la probabilité $1 - p$.
Si X désigne le nombre de fois où l'on a répété l'expérience E (dans des conditions identiques i.e p est constant et les épreuves sont indépendantes) pour que l'évènement A se réalise alors $X \sim \mathcal{G}(p)$
On dit que X est le temps d'attente du premier évènement A.

7.2 Loi de Poisson

Définition 115
Soit λ un nombre réel strictement positif. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ (noté $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) ssi

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$
2. $P(X = n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$

Proposition 116
Si X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$

1. *Soit X_1 et X_2 deux var indépendantes suivant respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$ alors $X_1 + X_2$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$*
2. *Plus généralement, si $X_1, .., X_n$ n var indépendantes suivant respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1), .., \mathcal{P}(\lambda_n)$ alors $X_1 + .. + X_n$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + .. + \lambda_n)$*

Plan d'études des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans toute la suite f désignera une fonction définie sur un intervalle I.

1 Intervalles stables et points fixes

Définition 116
On dit que J est un intervalle stable pour f ssi $f(J) \subset J$.

Exemple 56
L'intervalle $[0;1]$ est stable pour la fonction $f(x) = x - x^2$
Pour le constater, nous allons dresser le tableau de variation de f. $f'(x) = 2x - 1$ donc son tableau est

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow_{0}$	$\frac{1}{4}$	$\searrow_{0}$

On en déduit que $f([0;1]) = [0, \frac{1}{4}] \subset [0;1]$

Définition 117
Soit $x \in I$. On dit que x est un point fixe de f ssi $f(x) = x$

Théorème 43
Soit f une fonction continue sur I. Supposons que le segment $[a;b]$ est stable par f. Alors f possède un point fixe appartenant à $[a;b]$

Preuve :
On pose $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[a;b]$ et $g(a) = f(a) - a \leqslant 0$ *et* $g(b) = f(b) - b \geqslant 0$ (car $f(a)$ et $f(b) \in [a;b]$). Donc le théorème des valeurs intermédiares montre qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que $g(c) = 0$ i.e. $f(c) = c$ ■

Le théorème précédent nous montre qu'il est interessant pour rechercher des intervalles stables de déterminer pour commencer les points fixes de f puis de dresser le tableau de variations de f.

2 Existence de tous les termes de la suite

Pourquoi avons-nous introduit la notion d'intervalles stables ? Pour cela nous allons considérer l'exemple suivant

Exemple 57
Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 1}$ avec $u_0 = 2$.
A priori, on pense que tous les termes de la suite u sont parfaitement définis. C'est absolument faux.
Calculons u_1

$$u_1 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{2-1} = 1$$

Puisque $u_1 = 1$, $u_1 - 1 = 0$ et donc il va nous être impossible de calculer u_2 ! Bien entendu, tous les termes u_n avec $n \geqslant 2$ ne seront jamais calculables car ils n'existent pas

En général, il est impossible de justifier l'existence de tous les termes des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Methode 1
Supposons que l'intervalle I soit un intervalle stable de f et que $u_0 \in I$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$
Pour le démontrer, poson l'hypothèse de récurrence suivante

$$\mathcal{H}_n : \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \textit{ existe et } u_n \in I$$

- *$\mathcal{H}_0$ est trivialement vrai*

- *Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vrai. Alors u_n existe et $u_n \in I$ donc $f(u_n)$ existe et par stabilité de I par f, $f(u_n) \in I$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vrai*
- *Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$ est vrai.*

Maintenant, nous savons que si I est un intervalle stable de f et que $u_0 \in I$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$. Le théorème suivant nous fourni les limites éventuelles de la suite u.

Théorème 44
Soit f une fonction continue sur un intervalle l et u une suite convergeant vers l. Alors la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(l)$.

Supposons que la suite u converge vers une limite finie et soit l sa limite. Le théorème précédent montre que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f(l)$. Mais d'autre part, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} l$ et puisque $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient que $l = f(l)$.

Conclusion : si la suite u converge, elle converge vers un point fixe de f !
En général, la fonction f possède non pas un mais plusieurs points fixes. Pour déterminer la limite éventuelle, on utilise le résultat classique sur les suites : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in (a;b)$ et si la suite u converge vers l alors $l \in [a;b]$.

3 Monotonie de la suite

Il ne reste plus qu'a justifier que la suite u converge. Pour cela, cela nous allons essayer de déterminer la monotonie de la suite afin d'appliquer les théorèmes de convergence des suites monotones. Pour cela, il y aura plusieurs cas à distinguer

3.1 f est croissante et u_0 est explicite

Methode 2
Supposons que f est continue sur un intervalle I stable par f et contenant u_0. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$.
Supposons en outre que f est croissante sur l'intervalle I. On calcule alors explicitement $u_1 (= f(u_0))$ et on distingue les deux cas suivants

- $\underline{u_0 \leqslant u_1}$
  On va montrer par récurrence que la suite u est croissante. Posons,
  $$\mathcal{H}_n : \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$$
  - *$\mathcal{H}_0$ est trivialement vrai*
  - *Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vrai donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. Or la fonction f est croissante sur J et u_n ainsi que u_{n+1} appartiennent à J donc*
    $$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$$
    ce qui montre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vrai.
  - *Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$ est vrai et la suite u est croissante*
- $\underline{u_0 \geqslant u_1}$
  On va montrer par récurrence que la suite u est décroissante. Posons,
  $$\mathcal{H}_n : \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}$$
  - *$\mathcal{H}_0$ est trivialement vrai*
  - *Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vrai donc $u_n \geqslant u_{n+1}$. Or la fonction f est croissante sur J et u_n ainsi que u_{n+1} appartiennent à J donc*
    $$f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$$
    ce qui montre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vrai.
  - *Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$ est vrai et la suite u est décroissante*

3.2 f est décroissante et u_0 est explicite

Methode 3

Supposons que f est continue sur un intervalle I stable par f et contenant u_0. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$.
Supposons en outre que f est décroissante sur l'intervalle I. Nous introduisons alors deux suites auxiliaires a et b définies par

$$a_n = u_{2n} \text{ et } b_n = u_{2n+1}$$

Calculons a_{n+1}

$$a_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(a_n)$$

Donc la suite a vérifie une relation de récurrence donnée par

$$a_{n+1} = (f \circ f)(a_n)$$

Par définition $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n (= u_{2n}) \in I$ qui est un intervalle stable de $f \circ f$ et la fonction $f \circ f$ est croissante sur I ! On peut donc étudier la monotonie de la suite a à l'aide de la section 3.1.
De même, la suite b est définie par la relation

$$b_{n+1} = (f \circ f)(b_n)$$

et on procède de même que pour a.

3.3 $f(x) - x$ est de signe constant

Methode 4

Supposons que f est continue sur un intervalle I stable par f et contenant u_0. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$
Supposons en outre que le signe de $f(x) - x \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) sur I. Alors la suite u est croissante (resp. décroissante). Cela résulte du petit calcul suivant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0 \text{ (resp. } \leqslant 0)$$

4 Convergence

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in (a; b)$

4.1 u est croissante

1. Si u est majorée (par exemple, si $b \neq +\infty$) alors elle converge.vers un point fixe de f appartenant à $[a; b]$
2. Si u ne <u>semble</u> pas majorée (par exemple $b = +\infty$). On <u>essait</u> de minorer u par un nombre m tel qu'il n'existe pas de point fixe pour f sur l'intervalle $[m; b]$ et on utilise le raisonnement suivant
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$. Supposons que la suite u converge vers une limite finie l. Par suite $l \geqslant m$ et l est un point fixe de f. Or f ne possède pas de point fixe $[m; b]$ donc la suite ne converge pas et puisqu'elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$

4.2 u est décroissante

1. Si u est minoré (par exemple, si $a \neq -\infty$) alors elle converge.vers un point fixe de f appartenant à $[a; b]$
2. Si u ne <u>semble</u> pas minorée (par exemple $a = -\infty$). On <u>essait</u> de majorer u par un nombre M tel qu'il n'existe pas de point fixe pour f sur l'intervalle $[a; M]$ et on utilise le raisonnement suivant
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$. Supposons que la suite u converge vers une limite finie l. Par suite $l \leqslant M$ et l est un point fixe de f. Or f ne possède pas de point fixe $[a; M]$ donc la suite ne converge pas et puisqu'elle est croissante, elle diverge vers $-\infty$

4.3 u n'est ni croissante ni décroissante

Il s'agit du cas étudié dans la section 3.2. Les suites a et b sont monotones donc on peut leur appliquer les raisonnements des sections 4.1 et 4.2 pour déterminer leurs convergences respectives. Puis on applique le théorème

Théorème 45

La suite u converge vers l ssi (les suites $(u_{2n})_{n \geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geqslant 0}$ convergent et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = l$)

4.4 Application du TAF

Supposons que f soit de classe C^1 sur un intervalle stable $[a;b]$ (avec a, b deux nombres réels). Par conséquent, f possède au moins un point fixe sur le segment $[a;b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in [a;b]$.
Supposons en outre qu'il existe un nombre réel $k \in [0;1[$ tel que

$$\forall x \in [a;b], \ \ |f'(x)| \leqslant k.$$

Soit α un point fixe de f appartenant à $[a;b]$. Alors la suite u converge vers ce point fixe.

Methode 5
L'inégalité précédente nous permet d'appliquer le théorème des accroissements finis donc

$$\forall x, y \in [a;b], \ \ |f(x) - f(y)| \leqslant k\, |x - y|\,.$$

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [a;b]$ *et* $\alpha \in [a;b]$ *, nous remplaçons* x *par* u_n *et* y *par* α *dans l'inégalité précédente, ce qui nous donnent*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant k\, |u_n - \alpha|\,.$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ *et* $f(\alpha) = \alpha$ *d'où*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant k\, |u_n - \alpha|\,.$$

Posons la récurrence

$$\mathcal{H}_n : \forall n \in \mathbb{N}, \ \ |u_n - \alpha| \leqslant k^n\, |u_0 - \alpha|\,.$$

- $k^0\, |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$ *donc* $|u_0 - \alpha| \leqslant k^0\, |u_0 - \alpha|$ *donc* $\mathcal{H}_0$ *est vrai*
- *Supposons que* $\mathcal{H}_n$ *est vrai donc*

  $$|u_n - \alpha| \leqslant k^n\, |u_0 - \alpha|\,.$$

  Or on a

  $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k\, |u_n - \alpha|\,.$$

  donc

  $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k \times k^n\, |u_0 - \alpha| = k^{n+1}\, |u_0 - \alpha|$$

  ce qui montre que $\mathcal{H}_{n+1}$ *est vrai*
- *Par conséquent* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$ *est vrai*

  Puisque $|k| < 1$, *la suite géométrique* $(k^n)_{n \geqslant 0}$ *converge vers* 0 *et l'inégalité*

  $$|u_n - \alpha| \leqslant k^n\, |u_0 - \alpha|\,.$$

  montre que la suite u *converge vers* α*. En particulier, on constate que la fonction* f *ne possède alors qu'un seul point fixe*

Systèmes d'équations linéaires

1 Définitions

Définition 118

1. *Soient p et n deux nombres entiers non-nuls. On appelle système d'équations linéaires de p équations à n inconnues (apellé aussi système $p \times n$) un système de la forme*

$$(S) \left\{ \begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + .. + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + .. + a_{2,n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + .. + a_{p,n}x_n = b_p & (L_p) \end{array} \right.$$

où les $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont des nombres réels et $x_1, .., x_n$ sont les inconnues. Le nombre $a_{i,j}$ s'appelle le coefficient de la $j^{\text{ème}}$ inconnue x_j dans $i^{\text{ème}}$ équation (L_i).
Si $n = p$, on dit que le système (S) est carré d'ordre n.

2. *On dit que le système (S) est homogène (ou sans second membre) ssi $b_1 = .. = b_p = 0$.*
Dans ce cas, la p-liste $(0; ..; 0)$ est solution de (S).

3. *On appelle système homogène à (S) le système obtenu à partir de (S) en remplaçant tous les nombres b_i par 0.*

4. *Résoudre ce système, c'est déterminer touttes les p-listes $(x_1, .., x_n)$ de réels vérifiant simultanément les p équations $L_1, .., L_p$.*

5. *On dit que deux systèmes (S) et (S') sont équivalents ssi ils ont les mêmes solutions*

Définition 119
On dit qu'un système $p \times n$ (S) est triangulaire ssi $\forall i \in \{1; ..; p\}, \forall \in \{1; ..; n\}$ $i <\Rightarrow a_{i,j} = 0$. En d'autres termes, le système (S) est de la forme

$$(S) \left\{ \begin{array}{rl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 + ...a_{2,n}x_n = b_2 & (L_2) \\ a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4 + .. + a_{3,n}x_n = b_3 & (L_3) \\ \ddots & \\ a_{p,p}x_p + .. + a_{p,n}x_n = b_p & (L_p) \end{array} \right.$$

Définition 120 (Opérations élémentaires)
Soit (S) un système $n \times p$. On a appelle opération élémentaire l'une des trois opérations suivantes.

1. *L'échange de la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i et de la $j^{\text{ème}}$ colonne L_j se note*
$L_i \longleftrightarrow L_j$

2. *Soit λ un nombre réel* ***non-nul****.*
Le remplacement de la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i par la ligne λL_i se note $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (on a multilplie la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i par λ).

3. *Soit λ un nombre réel* ***quelconque****.*
Le remplacement de la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$ se note
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_i$ (on a multilplie la $j^{\text{ème}}$ ligne L_j par λ et on a ajouté le résultat à la $i^{\text{ème}}$ ligne)

Proposition 117
Tout système obtenu à partir de S en transformant l'une des ses équations par une transformation élémentaire est équivalent à (S).

2 Pivot de Gauss

C'est la méthode fondamentale dans la résolution des systèmes linéaires.

Methode 6

Soit (S) un système $n \times p$ de la forme

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + .. + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + .. + a_{2,n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + .. + a_{p,n}x_n = b_p & (L_p) \end{array}\right.$$

1. - *L'un au moins des coefficients de x_1 est non-nul. On en choisit un, que l'on appelera premier pivot, et supposons qu'il se situe à la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i.*
   - *On effectue l'opération élémentaire $L_1 \longleftrightarrow L_i$.*
   - *Dorénavant, le système est de la forme*

   $$(S_1)\left\{\begin{array}{ll} a^{(1)}_{1,1}x_1 + a^{(1)}_{1,2}x_2 + .. + a^{(1)}_{1,n}x_n = b^{(1)}_1 & (L_1) \\ a^{(1)}_{2,1}x_1 + a^{(1)}_{2,2}x_2 + .. + a^{(1)}_{2,n}x_n = b^{(1)}_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a^{(1)}_{p,1}x_1 + a^{(1)}_{p,2}x_2 + .. + a^{(1)}_{p,n}x_n = b^{(1)}_p & (L_p) \end{array}\right.$$

   où $a^{(1)}_{1,1} \neq 0$

   - *Ensuite on effectue les opérations élémentaires suivantes*

   $$\forall i \in \{2; ..; p\}\ L_i \leftarrow L_i + \frac{\lambda}{a_{i,1}} L_i$$

   qui nous permettent d'obtenir le système (S_2) équivalent à (S) donné par

   $$(S_2)\left\{\begin{array}{rl} a^{(1)}_{1,1}x_1 + a^{(1)}_{1,2}x_2 + .. + a^{(1)}_{1,n}x_n = b^{(1)}_1 & (L_1) \\ \left.\begin{array}{rl} a^{(2)}_{2,2}x_2 + .. + a^{(2)}_{2,n}x_n = b^{(2)}_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a^{(2)}_{p,2}x_2 + .. + a^{(2)}_{p,n}x_n = b^{(2)}_p & (L_p) \end{array}\right\} (S'_2) & \end{array}\right.$$

2. *Dans le système*

   $$(S'_2)\left\{\begin{array}{ll} a^{(2)}_{2,2}x_2 + .. + a^{(2)}_{2,n}x_n = b^{(2)}_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a^{(2)}_{p,2}x_2 + .. + a^{(2)}_{p,n}x_n = b^{(2)}_p & (L_p) \end{array}\right.$$

   (a) *soit l'inconnue x_2 apparait effectivement et donc il existe une certaine ligne où le coefficient de x_2 est non-nul. On utilise alors ce coefficient comme deuxième pivot et on procède alors comme dans 1. On obtient alors un système de la forme*

   $$(S''_2)\left\{\begin{array}{rl} a^{(3)}_{2,2}x_2 + a^{(3)}_{2,3}x_3 + .. + a^{(3)}_{2,n}x_n = b^{(3)}_2 & (L_2) \\ a^{(3)}_{3,3}x_3 + .. + a^{(3)}_{3,n}x_n = b^{(3)}_3 & (L_3) \\ \vdots & \\ a^{(3)}_{p,3}x_3 + .. + a^{(3)}_{p,n}x_n = b^{(3)}_p & (L_p) \end{array}\right.$$

   où $a^{(3)}_{2,2} \neq 0$. *Ainsi le système (S) est équivalent à un système (S_3) de la forme*

   $$(S_3)\left\{\begin{array}{rl} a^{(1)}_{1,1}x_1 + a^{(1)}_{1,2}x_2 + a^{(3)}_{1,3}x_3 + .. + a^{(1)}_{1,n}x_n = b^{(1)}_1 & (L_1) \\ a^{(3)}_{2,2}x_2 + a^{(3)}_{2,3}x_3 + .. + a^{(3)}_{2,n}x_n = b^{(3)}_2 & (L_2) \\ a^{(3)}_{3,3}x_3 + .. + a^{(3)}_{3,n}x_n = b^{(3)}_3 & (L_3) \\ \vdots & \\ a^{(3)}_{p,3}x_3 + .. + a^{(3)}_{p,n}x_n = b^{(3)}_p & (L_p) \end{array}\right.$$

   où $a^{(1)}_{1,1} \neq 0$ *et* $a^{(3)}_{2,2} \neq 0$.

(b) *soit l'inconnue x_2 a disparu du système (S_2'). Dans ce cas, d'autres variables ont pu également disparaitre donc le système (S_2') est en fait de la forme*

$$(S_2')\left\{\begin{array}{c} a_{2,k}^{(2)}x_k+..+a_{2,n}^{(2)}x_n=b_2^{(2)} \quad (L_2)\\ \vdots \\ a_{p,k}^{(2)}x_k+..+a_{p,n}^{(2)}x_n=b_p^{(2)} \quad (L_p)\end{array}\right.$$

où x_k est une variable apparaissant effectivement dans (S_2'). On se ramène alors au cas précédent.

3. *On itère alors le processus en éliminant une à une les inconnues jusqu'à obtenir un système (S') triangulaire équivalent à (S) de la forme*

$$(S')\left\{\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} a'_{1,1}x_1+a'_{1,2}x_2+...+a'_{1,n}x_n=b'_1\\ \ddots \\ a'_{r,r}x_r+..+a'_{r,n}x_n=b'_r\end{array}\right\}\text{équations principales}\\ \left.\begin{array}{r} 0=b'_{r+1}\\ \vdots \\ 0=b'_p\end{array}\right\}\text{équations auxiliaires}\end{array}\right.$$

où r est un entier pas nécessairement égal à p (ce provient du fait que des inconnues ont pu disparaitre lors du pivot de Gauss).et où tous les pivots $a'_{i,i}$ sont non-nuls. On dit que que les inconnues $x_1,..,x_r$ sont les inconnues principales et $x_{r+1},..,x_n$ sont les inconnues auxiliaires.

3 Résolution des systèmes

3.1 Cas général

Théorème 46

Soit (S) système $p\times n$. Le pivot de Gauss montre que (S) est équivalent à un système de la forme

$$(S')\left\{\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} a'_{1,1}x_1+a'_{1,2}x_2+...+a'_{1,n}x_n=b'_1\\ \ddots \\ a'_{r,r}x_r+..+a'_{r,n}x_n=b'_r\end{array}\right\}\text{équations principales}\\ \left.\begin{array}{r} 0=b'_{r+1}\\ \vdots \\ 0=b'_p\end{array}\right\}\text{équations auxiliaires}\end{array}\right.$$

Alors le système (S) admet des solutions ssi toutes les équations auxiliaires sont vérifiées.

Methode 7

Supposons que (S) admet des solutions donc les équations auxiliaires sont vérifiées. Ainsi (S) est équivalent au système

$$(S')\left\{\begin{array}{r} a'_{1,1}x_1+a'_{1,2}x_2+...+a'_{1,n}x_n=b'_1 \quad (L_1)\\ \ddots \\ a'_{r,r}x_r+..+a'_{r,n}x_n=b'_r \quad (L_r)\end{array}\right.$$

avec $a'_{i,i}\neq 0\ \forall i\in\{1;..;r\}$.

1. *Pusique $a'_{r,r}\neq 0$, on peut donc exprimer x_r en fonction de $x_{r+1},..,x_n$.*
2. *On substitue x_r dans (L_{r-1}) et puisque $a'_{r,r}\neq 0$, on exprime x_{r-1} en fonction de $x_{r+1},..,x_n$.*
3. *On itère le processus et on obtient au final que (S) est équivalent à un système (S'') de la forme*

$$(S'')\left\{\begin{array}{l} x_1=a''_{1,r+1}x_{r+1}+...+a''_{1,n}x_n+b''_1\\ x_2=a''_{2,r+1}x_{r+1}+...+a''_{2,n}x_n+b''_2\\ \qquad\ddots \\ x_r=a''_{r,r+1}x_{r+1}+...+a''_{r,n}x_n+b''_r\end{array}\right.$$

et les variables $x_{r+1},..,x_n$ peuvent prendre toutes les valeurs réelles possibles et imaginables.

Ainsi l'ensemble des solutions du systèmes (S) est

$$\{\begin{pmatrix} a''_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a''_{1,n}x_n + b''_1 \\ \vdots \\ a''_{r,r+1}x_{r+1} + ... + a''_{r,n}x_n + b''_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ x_{r+1}, .., x_n \in \mathbb{R}\}$$

3.2 Systèmes de Cramer

Définition 121
On dit qu'un système carré d'ordre n est de Cramer ssi il possède une unique n-liste solution.

Théorème 47

1. *Un système (S) carré d'ordre n est de Cramer ssi le pivot de Gauss fait apparaitre n pivots successifs non-nuls.*
2. *Par conséquent, un système (S) carré d'ordre n et homogène est de Cramer ssi il possède comme unique solution la n-liste $(0; ..; 0)$.*

Théorème 48
Un système est de Cramer ssi son système homogène associé est de Cramer.

Matrices

1 Matrices rectangulaires

1.1 défintions

Définition 122

1. *Soient n, p deux nombres entiers non-nuls. On appelle matrice à n lignes et p colonnes tout tableau rectangulaures de nombres réels comportant n lignes et p colonnes*
2. *L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*
3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Le coefficient situé à l'intersevtion de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $k^{\text{ème}}$ colonne ne note $a_{i,j}$ et on écrit alors*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

   ou encore $A = (a_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$

4. *Un élément de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) s'appelle une matrice ligne (resp. colonne).*
5. *La matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, que l'on note $0_{n,p}$, est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.*

1.2 Opérations sur les matrices

Définition 123 (Addition)
Soient $A = (a_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On appelle somme de A et B l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ noté $A + B$ défini par $A + B = (c_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ où

$$c_{i,,j} = a_{i,,j} + b_{i,,j} \ \forall i \in \{1; ..; n\} \text{ et } \forall j \in \{1; ..; p\}$$

Définition 124 (multiplication par un réel)
Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un nombre réel.
On appelle produit de A par λ l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ noté λA défini par $\lambda A(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ où

$$c_{i,j} = \lambda a_{i,,j} \ \forall i \in \{1; ..; n\} \text{ et } \forall j \in \{1; ..; p\}$$

Définition 125
Soient $A = (a_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ un élément de $\underline{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$ et $B = (b_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ un élément de $\underline{\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})}$
On appelle produit de A par B l'élément de $\underline{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$ noté $A \times B$ (ou AB) défini par $A \times B = (c_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ où

$$c_{i,,j} = a_{i,1}b_{1,,j} + a_{i,2}b_{2,,j} + .. + a_{i,p}b_{p,,j} \ \forall i \in \{1; ..; m\} \text{ et } \forall j \in \{1; ..; n\}$$

Remarque 8
Il est important que l'ordre d'écriture du produit est important. On peut s'en rappeller en utilisant le schéma suivant

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots & \boxed{b_{1,,j}} & \vdots \\ \vdots & \boxed{b_{2,,j}} & \vdots \\ \vdots & \boxed{\vdots} & \vdots \\ \vdots & \boxed{b_{p,,j}} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \boxed{c_{i,j}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Définition 126
Soit $A=(a_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ *un élément de* $\underline{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$. *On appelle transposé de* A *la matrice de* $\underline{\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})}$ *notée* ${}^tA=(c_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$ *définie par*

$$c_{i,j}=a_{,j,i}\ \forall i\in\{1;..;n\} \text{ et } \forall j\in\{1;..;p\}$$

En d'autres termes, ${}^tA$ *est la matrice obtenue à partir de* A *en échangeant les lignes avec les colonnes*

1.3 Règles de calculs

Proposition 118 (Addition)
Soients A,B,C *trois éléments de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- $A+B=B+A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$
- $0_{n,p}+A=A+0_{n,p}=A$
- $A+(-A)=(-A)+A=0_{n,p}$
- $A+B=C\Leftrightarrow A=C-B$
- $A+C=B+C\Leftrightarrow A=C$

Proposition 119 (multiplication)
Soients $A\in\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R}),B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* λ,μ *deux nombres réels*

- $1A=A$
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu B$
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- $\lambda(\mu A)=(\lambda u)A$
- $A(\lambda B)=(\lambda A)B=\lambda(AB)$

Proposition 120 (Transposition)

1. *Soients* A,B *deux éléments de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* λ *un nombre réel.*
   - ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$
   - ${}^t(\lambda A)=\lambda{}^tA$
   - ${}^t({}^tA)=A$
2. *Soients* $A\in\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R}),B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
$${}^t(AB)={}^tB{}^tA$$

2 Matrices carrés

2.1 Définitions

Définition 127

1. *Une matrice carré d'ordre* n *est un élément de* $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
   L'ensemble des matrices carré d'ordre n *se note aussi* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   La matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *se note* 0_n.
2. *On appelle diagonale d'une matrice carré* $A=(a_{i,,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ *la suite* $(a_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$.
3. *Une matrice diagonale d'ordre* n *est une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix}a_{1,1}&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&a_{n,n}\end{pmatrix}$$

4. *La matrice appellé identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et noté I_n la matrice*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une matrice scalaire est une matrice de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. *Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$(\text{resp.} \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & a_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,n-1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix})$$

6. *On dit qu'une matrice A est symétrique ssi ${}^tA = A$*

2.2 Règles de calculs

Définition 128
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et k un entier. On pose

$$A^0 = I_n \text{ et si } k \geqslant 1,\ A^k = \underbrace{A \times A \times .. \times A}_{k \text{ fois}}$$

Proposition 121
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et n, m deux entiers positifs. Alors on a $A^n A^m = A^{n+m}$

Remarque 9
Par contre, en général $(AB)^k \neq A^k B^k$. Cela résulte que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AB \neq BA$

Définition 129
Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B commutent (ou A et B sont permutables) ssi

$$AB = BA$$

Proposition 122
Soient A, B, C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $I_n A = A I_n = A$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$

Théorème 49 (Formule du binôme)
Soient A et B deux matrices qui commutent. Alors pour tout entier p, on a

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k}$$

2.3 Matrices inversibles

Définition 130
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice A est inversible ssi il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n$$

Si A est inversible, alors la mtrice B est appellé inverse de A et on la note A^{-1}
L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $GL_n(\mathbb{R})$.

Proposition 123
Soient A, B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. - *I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$*
   - *Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$*
   - *Si A et $B \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $AB \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*
   - *Si $A \neq 0_n$ et $B \neq 0_n$ et $AB = 0_n$ alors A* **et** *$B \notin GL_n(\mathbb{R})$*
2. *Supposons en outre que $C \in GL_n(\mathbb{R})$*
   - *Si $AC = BC$ alors $A = B$*
   - *Si $CA = CB$ alors $A = B$*
   - *Si $AC = B$ alors $A = BC^{-1}$*
   - *Si $CA = B$ alors $A = C^{-1}B$*

3 Systèmes linéaires et matrices

Soit (S) un système $p \times n$ de la forme

$$(S)\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + .. + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + .. + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + .. + a_{n,p}x_p = b_n \end{array}\right.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

ainsi que $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. et $B \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ définies par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

Un calcul simple montre que $AX = B$ donc la détermination des solutions $(x_1, .., x_n)$ du système (S) est équivalent à la détermination de la matrice colonne X.

Réciproquement, la connaissance des matrices A et B nous fournit le système (S)

Définition 131
La matrice A est appellée la matrice du système (S)

Lorsque $n = p$ alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Théorème 50
1. *(S) est un système de Cramer ssi la matrice A de (S) est inversible*
2. *Par conséquent, une matrice triangulaire est inversible ssi tous les termes de sa diagonale sont non-nuls*

3. *Une matrice diagonale est inversible ssi tous les termes de la diagonale sont non-nuls*

Théorème 51

1. *On peut trouver un nombre fini d'opérations élémentaires qui transforme A en une matrice B triangulaire (supérieure ou inférieure).*
   Alors $B \in GL_n(\mathbb{R})$ ssi $A \in GL_n(\mathbb{R})$

2. *Supposons que $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors on peut trouver un nombre fini d'opérations élémentaires qui transforme A en I_n.*
   En appliquant ces mêmes transformations élémentaires dans le même ordre à la matrice I_n, la matrice obtenue est A^{-1}

Exemple 58

Etudier l'inversibilité des matrices suivantes et le cas échéant, calculer l'inverse

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lcc}
 & A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

La matrice A a donc été transformée en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est triangulaire avec des éléments nuls sur la diagonales donc non-inversible. Par suite $A \notin GL_n(\mathbb{R})$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lcc}
 & A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 & \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

La matrice A a été transformée en $\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est une matrice triangulaire dont la diagonale ne contient que des éléments non-nuls donc inversible. Par suite, $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Poursuivons notre calcul

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1 - 7L_2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour s'assurer que l'on ait pas fait d'erreurs, on calcule AA^{-1} afin de vérifier que $AA^{-1} = I_3$